



HAL
open science

De la triangulation p -adique aux algèbres de Heyting, et vice-versa

Luck Darnière

► **To cite this version:**

Luck Darnière. De la triangulation p -adique aux algèbres de Heyting, et vice-versa. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2019. tel-02392014

HAL Id: tel-02392014

<https://univ-angers.hal.science/tel-02392014v1>

Submitted on 3 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITÉ D'ANGERS
Mention : Mathématiques

**De la triangulation p -adique à la théorie des modèles des
algèbres de Heyting, et *vice-versa***

présentée par
Luck DARNIÈRE

soutenue le 25 novembre 2019

Composition du jury :

Raf CLUCKERS	Université de Lille
Georges COMTE	Université de Chambéry
Mai GEHRKE	Université de Nice
Dugald MACPHERSON	University of Leeds
Jean-Philippe ROLIN	Université de Bourgogne

Rapporteurs :

Raf CLUCKERS, Georges COMTE, Mai GEHRKE

Sommaire

Introduction	1
1 Géométrie p-adique	3
1.1 Prérequis	4
1.1.1 Corps p -adiquement clos	5
1.1.2 Décomposition cellulaire	6
1.2 Polytopes et simplexes discrets	8
1.2.1 Définition des polytopes discrets	9
1.2.2 Faces des polytopes discrets	11
1.2.3 Découpage monotopique	12
1.3 Triangulation	13
1.3.1 Étape 1 : Décomposition cellulaire largement continue	15
1.3.2 Étape 2 : Monoplexes cellulaires	17
1.3.3 Étape 3 : Fin de la préparation	21
1.3.4 Étape 4 : Fin de la récurrence	24
1.3.5 Applications	26
1.4 P-minimalité versus p -optimalité	28
1.4.1 Corps P-minimaux et décomposition t-cellulaire	29
1.4.2 Corps p -optimaux, décomposition cellulaire et classification	30
2 Treillis topologiques et anneaux	33
2.1 Prérequis	35
2.1.1 Dualité de Stone et complémentations partielles	35
2.1.2 Dimension, co-dimension	36
2.1.3 Calcul propositionnel intuitionniste et modèles de Kripke	37
2.2 Anneaux de fonctions définissables continues	38
2.3 Treillis échelonnés	40
2.3.1 Sous-structures	41
2.3.2 Modèle-complétion, application aux p -adiques	42
2.4 Algèbres co-Heyting	43
2.4.1 Complétion pro-finie et ultramétrique	43
2.4.2 L'algèbre co-Heyting libre à n générateurs	45
2.4.3 Modèle-complétion	46
Annexes	49
1 Topologie	49
2 Logique et langage	49

Introduction

Le présent mémoire, rédigé au début de l'année 2019, accompagne ma candidature à l'habilitation à diriger des recherches. Il récapitule l'essentiel de mes travaux effectués à l'université d'Angers, au sein du LAREMA, depuis une vingtaine d'années.

Ces résultats s'étendent dans plusieurs directions, qu'on peut regrouper en deux domaines principaux : la géométrie p -adique d'une part ; la théorie des modèles d'anneaux ou de treillis d'autre part. Dans la première (chapitre 1), je range les simplexes discrets et la triangulation p -adique, résultat phare de cette thèse, ainsi que les variantes p -adiques de la o -minimalité (P-minimalité versus p -optimalité). Dans la seconde (chapitre 2), l'interprétation de l'anneau des entiers relatifs dans l'anneau des fonctions définissables continues $f : X \subseteq K^n \rightarrow K$ dans de très nombreuses structures de corps topologiques (notamment o -minimales ou P-minimales), ainsi que l'étude modèle-théorique des treillis échelonnés ou des algèbres co-Heyting. Chaque chapitre commence par une présentation détaillée, à laquelle je renvoie le lecteur soucieux d'en savoir rapidement davantage.

Qu'il me soit donné de souligner ici que, bien que très éloignés à première vue, ces deux domaines se sont révélés *inter-féconds*.

En effet c'est en étudiant, dans ma thèse de doctorat, les anneaux intègres satisfaisant un certain principe local-global en arithmétique (semblable au principe de Hasse) que j'ai été amené à considérer les treillis codant la topologie du spectre de ces anneaux, *via* la dualité de Stone notamment. Cela m'a conduit à étudier plus largement les treillis que j'ai appelés « échelonnés », dont tous les exemples de référence sont issus de la géométrie, comme le treillis des fermés de Zariski d'une variété algébrique. À la recherche d'une modèle-complétion pour la théorie des treillis échelonnés, j'ai rencontré un certain axiome de découpage qui en apparence n'avait plus rien de géométrique (il exclut toute possibilité de décomposition en composantes connexes ou irréductibles). Pourtant c'est bien à partir des modèles géométriques que j'ai pu construire, par recollements, des treillis échelonnés « abstraits » ayant cette propriété de découpage (voir, à la fin de ce mémoire, l'esquisse de preuve des théorèmes 2.4.14 et 2.4.15). C'est ainsi que, en m'appuyant sur l'intuition géométrique, j'ai obtenu des résultats de modèle-complétion pour les treillis échelonnés mais aussi, plus généralement, pour des variétés d'algèbres co-Heyting sans aucun rapport avec la géométrie.

Inversement, parmi les treillis géométriques sur des corps locaux, celui des fermés semi-algébriques de \mathbb{Q}_p^m était, en raison du caractère totalement déconnecté de la topologie p -adique, le seul qui pouvait prétendre avoir cette propriété de découpage, jamais soupçonnée jusque là. C'est dans le but de le montrer que je suis parti à la recherche d'un analogue p -adique de la triangulation réelle. Et en effet, le théorème de triangulation p -adique m'a permis de vérifier que les fermés semi-algébriques de \mathbb{Q}_p^m possédaient tous cette étonnante propriété de découpage (théorème 1.3.15).

Mais le sel de l'histoire, c'est que cette propriété n'est pas seulement une conséquence de la triangulation p -adique : c'est aussi l'une des clés de sa démonstration. En effet le théorème 1.3.15 de découpage des ensembles semi-algébriques p -adiques, prouvé à l'aide de la triangulation dans \mathbb{Q}_p^m , joue un rôle déterminant dans l'étape de récurrence qui permet d'en déduire la triangulation dans \mathbb{Q}_p^{m+1} . En somme, les preuves de la triangulation p -adique et du théorème de découpage sont si imbriquées qu'il aurait sans doute été impossible d'obtenir cette triangulation sans étudier auparavant la théorie des modèles des treillis échelonnés, à la recherche d'une modèle-complétion.

Chapitre 1

Géométrie et topologie dans les corps p -adiquement clos

Au cours des dernières décennies le développement de la géométrie semi-algébrique sur le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques et ses extensions finies (ou plus généralement sur un corps p -adiquement clos, voir plus loin) a révélé de nombreuses similitudes avec la géométrie semi-algébrique réelle, d'autant plus surprenantes que leurs objets respectifs, les ensembles semi-algébriques p -adiques ou réels, ont des topologies radicalement différentes. Ces progrès se sont étendus à d'autres classes d'ensembles, sous-analytiques pour commencer, puis définissables¹ dans des structures plus générales, variantes p -adiques de la o -minimalité. Rappelons quelques-unes des étapes qui ont marqué ce développement² :

[**Macintyre, 1976**] Élimination des quantificateurs pour \mathbb{Q}_p , et définition concomitante des ensembles semi-algébriques p -adiques.

[**Prestel et Roquette, 1984**] Généralisation des résultats de Macintyre aux corps p -adiquement clos, qui sont à \mathbb{Q}_p et ses extensions finies ce que les corps réels clos sont au corps \mathbb{R} des nombres réels.

[**Denef, 1984**] Décomposition cellulaire des ensembles semi-algébriques p -adiques, avec en application la rationalité des séries de Poincaré.

[**Scowcroft et van den Dries, 1988**] Théorie de la dimension, lemme de sélection et fonctions de Skolem, continuité par morceaux (voire analyticité locale) des fonctions semi-algébriques p -adiques.

[**Denef et van den Dries, 1988**] Généralisation des résultats précédents aux ensembles sous-analytiques p -adiques.

[**Haskell et Macpherson, 1997**] P -minimalité : tentative d'englober dans un même cadre axiomatique toutes les structures précédentes sur les corps p -adiquement clos, comme la o -minimalité l'a fait pour les structures sur les corps réel clos.

[**Cluckers, 2001**] Classification, à bijection semi-algébrique près, des ensembles semi-algébriques sur un corps p -adiquement clos. Théorème de préparation (type Weierstrass) des fonctions semi-algébriques. [Cluckers, 2004] étend ces résultats au cas sous-analytiques.

[**Cluckers et al., 2012**] Stratifications³ des ensembles semi-algébrique ou sous-analytique p -adiques.

Après quelques rappels sur les corps p -adiquement clos, les ensembles semi-algébriques p -adiques et la décomposition cellulaire regroupés dans la section 1.1, je présente dans les sections suivantes mes propres contributions aux géométries p -adiques, dans les trois directions ci-après.

1. Voir l'annexe 2 pour la définition générale des ensembles définissable dans une structure.

2. Pour un panorama plus exhaustif, voir [Bélair, 2012].

3. Signalons aussi les t -stratifications de [Halupczok, 2014], valables dans le contexte plus général des corps valués hens liens.

1. *Simplexes discrets et p -adiques (section 1.2)*. Dans [Darnière, 2017] j'ai introduit une notion de polytope et de simplexe discret, sous-ensembles de \mathbb{Z}^m définis par des inégalités linéaires d'un type très restrictif, dont les faces sont formées par leurs points à l'infini. J'ai montré que tout polytope discret pouvait se décomposer en complexe simplicial, en respectant certaines contraintes de formes. Cet outil flexible de « découpage monotopique » est l'analogue pour les polytopes discrets de la subdivision barycentrique des polytopes réels. Les polytopes et simplexes p -adiques sont construits à partir de la pré-image⁴ de leurs homologues discrets *via* la valuation, intersectée avec certains sous-groupes de $(\mathbb{Q}_p^\times)^m$ d'indices finis. Ils héritent des bonnes propriétés des polytopes discrets, notamment le découpage monotopique, qui permettent de les décomposer en « complexes simpliciaux p -adiques » et jouent un rôle clé dans le point suivant.
2. *Triangulation p -adique (section 1.3)*. Dans [Darnière, 2019b] je montre que tout ensemble semi-algébrique p -adique est semi-algébriquement homéomorphe à un « complexe simplicial p -adique » (au sens du point précédent). Cet analogue p -adique de la triangulation réelle apporte un éclairage nouveau sur la géométrie des ensembles semi-algébriques : il donne en particulier une variante de la décomposition cellulaire de Denef, apportant un contrôle inédit sur la façon dont les différentes parties d'une telle décomposition se touchent. Ce contrôle n'est pas aussi poussé que celui donné par les stratifications de [Cluckers *et al.*, 2012]. En revanche les cellules impliquées dans ce découpage ont une description bien plus précise et explicite que les strates, et l'homéomorphisme avec un complexe simplicial les ramène à une structure encore bien plus simple : celle des simplexes discrets. On obtient en application des résultats nouveaux de découpage et de recollement, de relèvement semi-algébrique des fonctions continues du corps vers le groupe des valeurs, et l'existence générale de rétractions semi-algébriques.
3. *P -minimalité et variantes (section 1.4)*. On sait depuis [Cubides Kovacsics et Nguyen, 2017] que la décomposition cellulaire de Denef ne se généralise pas à tous les corps P -minimaux. Au contraire la décomposition t -cellulaire inspirée de [Mathews, 1995], que nous avons construite avec P. Cubides Kovacsics et E. Leenknegt, s'applique à tous les ensembles P -minimaux [Cubides-Kovacsics *et al.*, 2017]. Elle permet entre autres de montrer que toute application P -minimale est continue par morceaux (comme le sont les applications o -minimales), ce qui répond à une question de [Haskell et Macpherson, 1997].
La p -optimalité, que j'ai introduite séparément, est une autre variante p -adique de la o -minimalité. Elle est un peu plus restrictive que la P -minimalité mais reste assez générale pour englober tous les exemples non pathologiques (notamment les structures semi-algébrique et sous-analytique). Dans [Darnière et Halpuczok, 2017] nous montrons que la décomposition cellulaire de Denef, le théorème de préparation pour les fonctions semi-algébriques et la classification à bijection semi-algébrique près des ensembles semi-algébriques, déjà étendus dans [Cluckers, 2004] aux sous-analytiques, se généralisent aux fonctions et ensembles p -optimaux.

1.1 Prérequis : ensembles semi-algébriques et décomposition cellulaire

La définition même des ensembles semi-algébriques p -adiques ne va pas de soi. Nous considérons tout au long de ce chapitre un corps K fixé (dont nous allons rapidement supposer qu'il est p -adiquement clos, voir plus loin). Le groupe multiplicatif de K est noté K^\times . Sur un tel corps, on introduit d'abord pour tout entier $N \geq 1$ l'ensemble

$$P_N^\times = \{x^N \mid x \in K^\times\}.$$

Il s'agit visiblement d'un sous-groupe multiplicatif de K^\times (le signe \times en exposant dans P_N^\times est là pour le rappeler). Les **ensembles semi-algébriques** sur K sont alors par définition, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$,

4. La même construction pourrait d'ailleurs servir aussi bien pour d'autres corps valués dans un \mathbb{Z} -groupe.

les réunions finies de parties de K^m « de base » : celles définies par un nombre fini de conditions de l'un ou l'autre des types suivants

$$f(x) = 0 \qquad f(x) \in P_N^\times$$

où $f \in K[X]$ est un polynôme en m variables. Les **fonctions semi-algébriques** sur K sont les fonctions $h : X \subseteq K^m \rightarrow K^n$ dont le graphe est semi-algébrique. Toutefois, si K est un corps valué et $|K|$ son image par la valuation (voir plus loin), par abus de langage nous dirons aussi d'une partie S de $K^m \times |K|^n$ (resp. d'une fonction $h : K^m \rightarrow |K|^n$) qu'elle est **semi-algébrique** si la pré-image de S (resp. du graphe de h) par la valuation est une partie semi-algébrique de K^{m+n} au sens précédent.

Remarque 1.1.1. Si K est algébriquement clos les conditions du type $f(x) \in P_N^\times$ sont équivalentes à $f(x) \neq 0$, ce qui redonne la définition usuelle des ensembles semi-algébriques sur un tel corps. De même si K est réel clos ces conditions se réduisent à $f(x) \neq 0$ si N est impair, et à $f(x) > 0$ si N est pair, ce qui là encore redonne la définition usuelle des ensembles semi-algébriques réels.

Les ensembles semi-algébriques généraux que nous venons de définir ont été introduits dans [Macintyre, 1976] pour le corps \mathbb{Q}_p . Dans ce cas il est facile de voir que la classe des ensembles semi-algébriques est stable par combinaisons Booléennes, car les groupes P_N^\times sont d'indice fini dans \mathbb{Q}_p^\times . Le principal résultat de [Macintyre, 1976], énonce qu'elle est également stable par projection, tout comme dans le cas algébriquement clos (théorème de Chevalley) et le cas réel clos (théorème de Tarski). Ce résultat fondamental marque la naissance de la géométrie semi-algébrique p -adique. Bien plus que l'analogie formelle relevée dans la remarque 1.1.1, c'est bien sûr ce théorème, analogue p -adique de ceux de Chevalley et de Tarski, qui justifie la définition unifiée des ensembles semi-algébriques donnée plus haut.

1.1.1 Corps p -adiquement clos

Le théorème de Macintyre a été généralisé dans [Prestel et Roquette, 1984] aux **corps p -adiquement clos**. On appelle ainsi tout corps K de caractéristique nulle muni d'une valuation v telle que :

- (K, v) est Hensélien.
- Le corps résiduel de v est un corps fini de caractéristique p .
- Le groupe des valeurs de v est un \mathbb{Z} -groupe, c'est-à-dire un groupe abélien \mathcal{Z} linéairement ordonné, ayant un plus petit élément strictement positif noté 1, tel que $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ possède n éléments pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce contexte élargi, le théorème de Macintyre peut aussi s'énoncer sous la forme suivante.

Théorème 1.1.2 ([Macintyre, 1976]). *Soit K un corps p -adiquement clos. Les parties de K^m définissables dans le langage des anneaux⁵ sont exactement les parties semi-algébriques.*

Il existe de nombreux exemples naturels de corps p -adiquement clos :

- Toute extension finie de \mathbb{Q}_p est p -adiquement close. Ce sont là tous les corps p -adiquement clos complets.
- La clôture algébrique relative de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q}_p , ainsi que ses extensions finies, est un corps p -adiquement clos. Étant dénombrable, il n'est pas complet (mais bien Hensélien).
- Le complété pour la valuation t -adique du corps $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Q}_p((t^{\frac{1}{n}}))$ des séries de Puiseux sur \mathbb{Q}_p , est un corps p -adiquement clos. Noter que son groupe des valeurs n'est pas \mathbb{Z} mais $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, muni de l'ordre lexicographique, ce qui fournit un exemple de \mathbb{Z} -groupe différent de \mathbb{Z} .

5. Voir l'annexe 2 pour la définition générale des ensembles définissable dans une structure. Dans tout corps p -adiquement clos K l'anneau de la valuation est définissable dans le langage des anneaux (tout comme le cône positif l'est dans un corps réel clos). Les parties de K^m définissables dans le langage des corps valués sont donc déjà définissables dans le langage des anneaux, et donc aussi semi-algébriques par le théorème de Macintyre. En particulier l'adhérence d'un ensemble semi-algébrique est encore semi-algébrique.

- Tout ultraproduit de corps p -adiquement clos (dont les indices de ramifications⁶ sont majorés par une constante) est encore p -adiquement clos. Le cardinal d'un tel corps, et celui de son groupe des valeurs, peut être arbitrairement grand.

On suppose désormais, jusqu'à la fin de ce chapitre, qu'un corps p -adiquement clos K est fixé, avec sa valuation v et son groupe des valeurs \mathcal{Z} . On fixe aussi une fois pour toutes une **uniformisante** de (K, v) , c'est-à-dire un élément $\pi \in R$ tel que $v(\pi) = 1$. On note R l'anneau de sa valuation p -adique, R^\times le groupe des inversibles de R . Rappelons que R^\times est un sous-groupe multiplicatif de K^\times . Il est commode, et plus suggestif, d'utiliser pour la valuation de K une écriture multiplicative :

- pour tout $x \in K$, $|x| = xR = \{xa \mid a \in R\}$;
- pour tous $x, y \in K$, $|y| \leq |x| \Leftrightarrow yR \subseteq xR \Leftrightarrow v(y) \geq v(x)$;
- pour tout $S \subseteq K$, $|S| = \{|x| \mid x \in S\}$.

L'élément $|0| = \{0\}$ sera simplement noté 0 . C'est le minimum de l'ensemble totalement ordonné $|K| = \{|x| \mid x \in K\}$. Clairement $|K^\times| = K^\times / R^\times$ n'est autre que le groupe des valeurs de v noté multiplicativement, et la restriction à K^\times de l'application $x \mapsto |x|$ est la projection canonique de K^\times sur K^\times / R^\times . En particulier c'est un morphisme de groupes. On prolonge la multiplication de $|K^\times|$ à $|K|$ en posant $0\alpha = \alpha 0 = 0$ pour tout $\alpha \in |K|$. Naturellement, pour tous $a, b \in K$:

- $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$;
- $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ on note $\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_m|)$. Enfin on appelle **boule** de centre $c \in K^m$ et de rayon $r \in K^\times$ l'ensemble

$$B(c, r) = \{x \in K^m \mid \|x - c\| \leq r\}.$$

On note $\llbracket 1, m \rrbracket$ l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ et on appelle **support** d'un point $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ l'ensemble des indices $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $x_i \neq 0$. Pour toute partie I de $\llbracket 1, m \rrbracket$ on note π_I la projection naturelle de K^m sur l'ensemble des points de support I (qui envoie x_i sur 0 pour tout $i \notin I$). L'ensemble $\pi_I(K^m)$ est souvent identifié à K^r avec $r = \text{Card } I$.

Un cas particulier, qui revient souvent dans les définitions par récurrence, est celui où π_I est la projection naturelle de K^m sur K^{m-1} (en vérité sur $K^{m-1} \times \{0\}$, mais on fait rarement la différence). Dans ce cas $\pi_I(x)$ est noté \hat{x} , et l'image de toute partie A de K^m par π_I est appelée le **socle** de A et notée \hat{A} . De même, si \mathcal{A} est une famille de parties de K^m on note

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{A} \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

1.1.2 Décomposition cellulaire

Une **cellule** semi-algébrique A sur K est généralement définie comme l'ensemble des $(x, t) \in K^m \times K$ tels que

$$|v(x)| \square_1 |t - c(x)| \square_2 |\mu(x)| \quad \text{et} \quad t - c(x) \in H$$

où c, μ, v sont des fonctions semi-algébriques (resp. définissables), la première appelée **centre** et les deux autres **bornes** de la cellule, où \square_1 et \square_2 sont des inégalités larges ou strictes, et où H est $\{0\}$ ou une classe de congruence modulo un sous-groupe semi-algébrique (resp. définissable) \mathbb{G} de K^\times . Nous appellerons A une **cellule modulo** \mathbb{G} et H une **cossette** de A .

Une même cellule peut avoir plusieurs centres ou bornes. Pour pouvoir parler « du » centre, « des » bornes et de « la » cossette d'une cellule modulo \mathbb{G} , il est commode de remplacer cette notion par celle de **cellule présentée** modulo \mathbb{G} . J'appelle ainsi la donnée d'un quadruplet

$$A = (c_A, v_A, \mu_A, \lambda_A)$$

6. Selon [Prestel et Roquette, 1984], l'indice de ramification d'un corps p -adiquement clos de valuation v et de corps résiduel k est le produit de $v(p)$ par le degré de k sur le corps à p éléments.

où c_A, v_A, μ_A sont des fonctions semi-algébriques, d'un ensemble non vide $X_A \subseteq K^m$ dans K , et $\lambda_A \in K$. Je supposerai en outre que μ_A et v_A sont soit identiquement nulles sur X_A , soit jamais nulles, et que pour tout $x \in X_A$ il existe au moins un $t \in K$ tel que

$$|v_A(x)| \leq |t - c_A(x)| \leq |\mu_A(x)| \quad \text{et} \quad t - c_A(x) \in \lambda_A \mathbb{G}. \quad (1.1)$$

Si $\mu_A = 0$ la cellule est de **type 0**, sinon elle est de **type 1**. L'ensemble des $(x, t) \in K^m \times K$ satisfaisant (1.1) est alors évidemment une cellule de K^{m+1} de socle X_A , qu'on pourra appeler **cellule sous-jacente** à A . Inversement, toute cellule modulo \mathbb{G} bornée⁷ peut se décomposer en cellules sous-jacentes à des cellules présentées modulo \mathbb{G} . Pour simplifier, le plus souvent je ne distingue purement et simplement pas la cellule présentée A de sa cellule sous-jacente, que je noterai donc aussi A .

Une **cellule largement continue** est une cellule présentée A dont le centre et les bornes sont largement continus⁸ sur le socle de A . Enfin une **cellule ajustée** est une cellule présentée A telle que pour tout $x \in A$

$$|\mu_A(x)| = \sup_{(x,t) \in A} |t - c_A(x)| \quad \text{et} \quad |v_A(x)| = \inf_{(x,t) \in A} |t - c_A(x)|.$$

Le théorème de décomposition cellulaire de [Denef, 1984] (voir plus loin théorème 1.1.4) énonce que tout ensemble semi-algébrique $S \subseteq \mathbb{Q}_p^m$ admet une partition finie en cellules modulo P_N^\times . Mais il s'accompagne d'un théorème de préparation des fonctions semi-algébriques qui, sous la forme explicitée⁹ dans [Cluckers, 2001], nécessite les cellules plus fines modulo $Q_{N,M}^\times$ avec $N, M \in \mathbb{N}^\times$.

La définition de ce nouveau sous-groupe de K^\times , lui aussi semi-algébrique et d'indice fini dans K^\times , n'est pas simple. Dans le cas particulier où $K = \mathbb{Q}_p$ elle se réduit à

$$Q_{N,M}^\times = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p^{kN} (1 + p^M \mathbb{Z}_p).$$

où \mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p -adiques. Pour un corps p -adiquement clos général il faut d'abord montrer l'existence pour tout $M \in \mathbb{N}^*$ d'un unique morphisme de groupes multiplicatifs¹⁰

$$\overline{\text{ac}}_M : K^\times \rightarrow (R/\pi^M R)^\times$$

ayant les propriétés suivantes : (i) $\overline{\text{ac}}_M(\pi) = 1$, et; (ii) $\overline{\text{ac}}_M(u) = u + \pi^M R$ pour tout $u \in R^\times$ [Cluckers et Leenknegt, 2012, lemme 1.3]. On peut alors poser par définition

$$Q_{N,M}^\times = \{x \in P_N^\times \cdot (1 + \pi^M R) \mid \overline{\text{ac}}_M(x) = 1\}.$$

L'intérêt et l'importance de ces sous-groupes de K^\times résident dans la propriété suivante [Cluckers, 2001, corollaire 1].

Lemme 1.1.3 (Hensel). *Pour tout entier $e \geq 1$, l'application $x \mapsto x^e$ définit un isomorphisme de groupes, de $Q_{1,v(e)+1}^\times$ dans $Q_{e,2v(e)+1}^\times$ (et plus généralement de $Q_{k,l}^\times$ dans $Q_{ek,v(e)+l}^\times$ pour tout $k \geq 1$ et tout $l > v(e)$).*

7. Pour pouvoir aussi considérer toute cellule non bornée comme union de cellules sous-jacentes à des cellules présentées, il suffit d'ajouter à K un élément supplémentaire ∞ , de convenir que $|a| < |\infty|$ pour tout $a \in K$, et d'assouplir la définition des cellules présentées en demandant que μ_A soit ou bien une fonction semi-algébrique, ou bien ∞ .

8. Comme il est expliqué dans l'annexe 1, une fonction $f : X \subseteq K^m \rightarrow K$ est largement continue sur une partie A de X si sa restriction à A se prolonge en une fonction continue sur l'adhérence de A dans K^m .

9. [Denef, 1984] considère avant tout des cellules modulo K^\times , et implicitement aussi modulo P_N^\times . Cluckers l'a rendu explicite dans [Cluckers, 2001]. Les cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ sur un corps p -adiquement clos quelconque, avec leur définition basée sur la composante angulaire, n'apparaissent à ma connaissance qu'à partir de [Cluckers et Leenknegt, 2012]. Néanmoins, pour $K = \mathbb{Q}_p$ le groupe $Q_{N,M}^\times$ est introduit dans [Cluckers, 2001] avec la notation $P_n^{(k)}$ pour $Q_{n,k}^\times \cup \{0\}$, et est déjà implicitement présent dans le lemme 2.1 de [Denef, 1986], où il est montré que $Q_{N,M}^\times$ est semi-algébrique.

10. Pour tout anneau A , on note A^\times le **groupe des inversibles** de A .

D'où l'existence d'une fonction réciproque $x \mapsto x^{1/e}$ définie sur $Q_{e,2\nu(e)+1}^\times$ (et donc aussi sur $Q_{N,M}^\times$ pourvu que $e|N$ et $M > 2\nu(e)$). Convenablement généralisé aux corps p -adiquement clos, le théorème de décomposition cellulaire et de préparation des fonctions semi-algébriques de Denef, revu et amélioré par Cluckers, peut alors s'énoncer¹¹ comme suit.

Théorème 1.1.4 ([Denef, 1984]). *Soit $S \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique, soient $\theta_1, \dots, \theta_r$ des fonctions semi-algébriques de S dans K .*

1. (Décomposition cellulaire) *Il existe, pour un certain $N \in \mathbb{N}^\times$, une partition finie de S en cellules modulo P_N^\times .*
2. (Préparation des fonctions semi-algébriques) *Il existe un entier $e \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des entiers $N, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $e|N$ et $M > \nu(e)$, et une partition finie de S en cellules A modulo $Q_{N,M}^\times$ sur chacune desquelles, pour $1 \leq i \leq r$,*

$$\theta_i(x, t) = \chi(x, t) \cdot (1 + \pi^n \omega(x, t)) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}} \quad (1.2)$$

où $\chi : A \rightarrow U_e$, $\omega : A \rightarrow R$ et $h : \hat{A} \rightarrow K$ sont des fonctions semi-algébriques, et α un entier relatif (tous dépendants de i et de A).

Remarque 1.1.5. Si $\lambda_A \neq 0$ alors $y \mapsto y^{\frac{1}{e}}$ est bien définie sur $Q_{N,M}^\times$ puisque $e|N$ et $M > 2\nu(e)$, et donc $[\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{1/e}$ est bien définie sur A . Si $\lambda_A = 0$ en revanche λ_A^{-1} n'est pas défini, mais comme dans ce cas $t - c_A(x) = 0$ sur A on conviendra que $\lambda_A^{-1}(t - c_A(x)) = 1$ sur A . Cette convention permet de donner dans le théorème une forme aux $\theta_i(x, t)$ valable sur chacune des cellules de la partition.

Remarque 1.1.6. Dans ce théorème l'entier n joue un rôle régulateur. L'expression (1.2) peut en effet s'écrire aussi sous la forme

$$\left| \frac{\theta_i(x, t)}{\chi(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}}} - 1 \right| \leq |\pi|^n.$$

La fonction $\chi(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}}$ constitue donc une approximation de $\theta_i(x, t)$, au sens où son rapport avec $\theta_i(x, t)$ est rendu proche de 1 (uniformément sur A). La précision de cette approximation est d'autant élevée que π^n est plus proche de 0, donc que l'entier n est plus grand. D'après le théorème, on peut donc obtenir une approximation de $\theta_i(x, t)$ par des fonctions de la forme $\chi(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}}$ avec une précision arbitrairement grande (sans changer le dénominateur e dans l'exposant ni le groupe $Q_{N,M}^\times$ associé !) en raffinant simplement la décomposition cellulaire.

1.2 Polytopes et simplexes discrets

La première difficulté, quand on cherche un analogue p -adique du théorème de triangulation des ensembles semi-algébriques réels, est évidemment de déterminer ce qui pourrait faire office de simplexe, et plus généralement de polytope, sur un corps non ordonné et totalement déconnecté comme \mathbb{Q}_p . L'idée est d'abord d'utiliser l'ordre présent sur le groupe des valeurs, et donc de commencer par définir une notion de « polytope discret » dans \mathbb{Z}^m . Les polytopes p -adiques seront alors définis naturellement comme la pré-image des polytopes discrets par la valuation (à ceci près qu'on aura besoin de restreindre celle-ci aux groupes $Q_{1,M}^\times$, comme nous le verrons dans la section 1.3).

Mais avant cela, récapitulons ici toutes les propriétés des polytopes réels qu'on aimerait retrouver chez leurs homologues discrets.

11. Denef et Cluckers ne formulent le théorème de préparation que pour des fonctions θ_i polynomiales, ou pour θ_i^e ou $|\theta_i|$, ce qui ne nécessite pas l'introduction des fonctions χ à valeurs dans U_e du théorème 1.1.4. Toutefois l'énoncé un peu plus général proposé ici s'en déduit facilement.

(Simplicité) Les polytopes sont des objets « simples » : ce sont des parties bornées de \mathbb{R} , et ils sont définis par des inégalités affines.

(Faces) Les polytopes ont une notion de « faces » qui a de bonnes propriétés combinatoires et topologiques, notamment : les faces de tout polytope S sont des polytopes ; si S'' est une face de S' , et S' une face de S , alors S'' est une face de S ; l'ensemble des faces propres de S forme un complexe qui partitionne¹² sa frontière.

(Découpage) Le « découpage barycentrique » [van den Dries, 1998, chapitre 8] permet de découper facilement tout polytope en un complexe simplicial, en respectant des contraintes (sur leur faces et leurs formes) fixées à l'avance.

La condition de simplicité n'est pas difficile à transposer au cadre discret ou p -adique : on se limitera à des parties de \mathbb{Z}^m définies par des inégalités affines (à coefficients rationnels), et pour que leur pré-image soit bornée dans \mathbb{Q}_p^m on exigera en outre que les coordonnées des points d'un polytope discret S soient toujours positives.

Se pose alors le problème des faces de S : celles-ci sont censées former un complexe qui partitionne la frontière de S , or toute partie de \mathbb{Z}^m est à la fois ouverte et fermée, donc n'a pas de frontière ! La solution viendra des points à l'infini. En effet l'analogie p -adique de l'intervalle $]0, 1[$ est la boule unité épointée $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Tout comme 0 est un sommet (donc une face) du simplexe $]0, 1[$ dans \mathbb{R} , il est naturel d'un point de vue topologique de considérer 0 comme une face de $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ et donc, une fois passé dans le groupe des valeurs *via* la valuation, de considérer $+\infty$ comme une « face » de \mathbb{N} , et à vrai dire sa seule face.

Malheureusement, cette approche naïve ne fonctionne pas tout-à-fait : comme le montre plus loin l'exemple 1.2.2, il arrive qu'une partie de \mathbb{Z}^3 définie uniquement par des inégalités affines ait des « faces » qui ne soient pas elles-mêmes définissables de cette façon. Nous allons voir comment y remédier en introduisant dans la définition des polytopes discrets (qui restent définis par des inégalités affines) des conditions beaucoup plus restrictives. Avec ces conditions nous obtiendrons non seulement que les faces des polytopes discrets ont toutes les propriétés requises (section 1.2.2), mais aussi qu'on peut les découper tout aussi librement que les polytopes réels (section 1.2.3).

1.2.1 Définition des polytopes discrets

Rappelons que \mathcal{Z} est le groupe des valeurs (noté additivement) du corps p -adiquement clos K . Soit $\Gamma = \mathcal{Z} \cup \{+\infty\}$ l'image de K par la valuation. On le munit de sa topologie naturelle, héritée de celle de K . De même Γ^m est muni de la topologie produit, image de celle de K^m par la valuation.

On appelle **support** d'un point $a = (a_1, \dots, a_m) \in \Gamma^m$ l'ensemble des indices $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $a_i \neq +\infty$. Pour tout $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ on note π_I la projection naturelle de Γ^m sur l'ensemble des points de support I (qui envoie a_i sur $+\infty$ pour tout $i \notin I$). Tout comme dans K^m , le **socle** \widehat{A} d'une partie A de K^m est l'image de A par la projection naturelle sur Γ^{m-1} . Enfin pour tout $A \subseteq \Gamma^m$ et tout I on pose

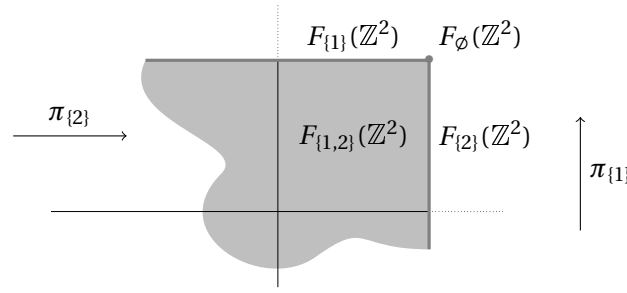
$$F_I(A) = \overline{A} \cap \pi_I(\Gamma^m).$$

Si l'ensemble $F_I(A)$ est non vide, on l'appelle la **face** de A de support I .

Exemple 1.2.1. \mathcal{Z}^2 possède quatre faces disjointes qui sont $F_{\{1,2\}}(\mathcal{Z}^2) = \mathcal{Z}^2$, $F_{\{1\}}(\mathcal{Z}^2) = \mathcal{Z} \times \{+\infty\}$, $F_{\{2\}}(\mathcal{Z}^2) = \{+\infty\} \times \mathcal{Z}$ et $F_{\emptyset}(\mathcal{Z}^2) = \{(+\infty, +\infty)\}$ (voir figure 1.1).

Si $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$ il est pratique de représenter $a \in \Gamma$ par le point de \mathbb{R} d'abscisse $1 - 2^{-a}$, avec la convention que $2^{-\infty} = 0$. En effet ceci fournit un plongement de Γ dans \mathbb{R} (plus précisément dans $] - \infty ; 1[$) qui préserve à la fois l'ordre et la topologie. On représentera de même Γ^m plongé dans $(] - \infty ; 1[)^m$. Bien que les parties de Γ^m soient essentiellement des ensembles discrets, par commodité on les dessinera comme continues : par exemple $F_{\{1\}}(\Gamma^2) = \mathbb{Z} \times \{+\infty\}$ est identifié à $\{(1 - 2^{-a}, 1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ mais dessiné dans \mathbb{R}^2 comme $] - \infty ; 1[\times \{1\}$. Les quatre faces de \mathbb{Z}^2 sont représentées ainsi sur la figure 1.1, et les projections $\pi_{\{1\}}$ et $\pi_{\{2\}}$ correspondantes sont les projections verticales et horizontales respectivement.

12. Voir l'annexe 1 la définition générale d'un complexe, et de la frontière ∂A . Notons que l'on parle ici de polytopes définis dans \mathbb{R}^m par des inégalités strictes, c'est pourquoi les faces (relativement ouvertes) sont deux à deux disjointes.

FIGURE 1.1 – Représentation de \mathbb{Z}^2 et de ses faces.

Soit \mathcal{Q} l'enveloppe divisible de \mathcal{Z} , et $\Omega = \mathcal{Q} \cup \{+\infty\}$. En identifiant \mathbb{Z} au sous-groupe de \mathcal{Z} engendré par son plus petit élément strictement positif, on considère \mathbb{Z} et \mathbb{Q} comme plongés dans \mathcal{Z} et \mathcal{Q} . On munit Ω de la topologie naturelle, pour laquelle $+\infty$ est adhérent à \mathcal{Q} et qui induit sur \mathcal{Q} la topologie engendrée par les intervalles ouverts.

Une fonction f à valeurs dans Ω sera dite Ω -**affine** sur une partie A de Γ^m s'il existe $\alpha_0 \in \Omega$ et $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ pour $1 \leq i \leq m$ tels que

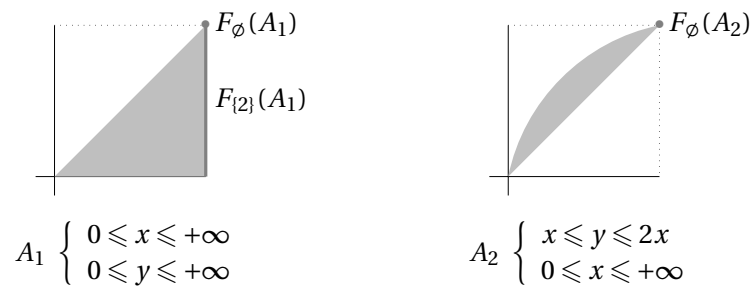
$$f(x_1, \dots, x_m) = \alpha_0 + \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i x_i$$

sur A . Bien entendu, pour qu'une telle écriture ait toujours un sens on convient que $0 \times (+\infty) = 0$, et on exige que $\alpha_i = 0$ pour chaque indice i pour lequel $x_i = +\infty$ en au moins un point $x = (x_1, \dots, x_m)$ de A . Une fonction Ω -affine sur A sera donc soit constamment égale à $+\infty$ (si $\alpha_0 = +\infty$) soit à valeurs dans \mathcal{Q} .

On définit alors les **polytopes discrets** comme suit, par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. Si $m = 0$, Γ^0 lui-même est un polytope discret. Si $m \geq 1$, une partie A de $F_I(\Gamma^m)$ est un polytope discret si son socle en est un et si

$$A = \{a = (a_1, \dots, a_m) \in F_I(\Gamma^m) \mid \hat{a} \in \hat{A} \text{ et } \mu(\hat{a}) \leq a_m \leq \nu(\hat{a})\}$$

où $\mu, \nu : \hat{A} \rightarrow \Omega$ sont des fonctions Ω -affines, positives et largement continues sur \hat{A} . Nous appellerons un tel couple (μ, ν) une **présentation**. Notons que le support $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ d'un polytope discret fait partie intégrante de sa définition.

FIGURE 1.2 – Deux polytopes discrets de support $\{1, 2\}$ et leurs faces.

Comme on l'a dit, il serait plus naturel *a priori* d'appeler polytopes discrets de support I toute partie de $F_I(\Gamma^m)$ définie par des inégalités Ω -affines. Le problème est que les faces d'une telle partie ne sont pas nécessairement définissables par des inégalités Ω -affines, donc ne sont pas nécessairement des polytopes en ce sens élargi, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.2.2. $A \subseteq \mathbb{Z}^3$ défini par $0 \leq y \leq x$ et $z = 2x - 2y$, a une face $F_{\{3\}}(A) = \{+\infty\} \times \{+\infty\} \times 2\mathbb{N}$ qui n'est pas définissable par des inégalités Ω -affine. Noter que A est défini par des inégalités en cascade, comme les polytopes discrets, avec $\mu(x, y) = \nu(x, y) = 2x - 2y$. Le problème est que cette dernière

fonction, bien que Ω -affine, n'est pas largement continue sur \widehat{A} : elle n'a pas de limite quand (x, y) tend vers $(+\infty, +\infty)$ dans \widehat{A} .

1.2.2 Faces des polytopes discrets

D'un point de vue topologique les faces des parties définies par des inégalités Ω -affines ont néanmoins d'assez bonnes propriétés, valables *a fortiori* pour les polytopes discrets.

Proposition 1.2.3. *Soit A une partie¹³ de \mathcal{Z}^m définie par des inégalités Ω -affines. Soient $I, J \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $F_I(A)$ et $F_J(A)$ soient non vides.*

1. $F_I(A) = \pi_I(A)$ est le projeté de A sur $F_I(\Gamma^m)$.
2. $F_J(A) \subseteq F_I(A) \iff J \subseteq I$ et dans ce cas $F_J(F_I(A)) = F_J(A)$.
3. $F_{I \cap J}(A) \neq \emptyset$.

L'ensemble des faces propres de A forme donc un demi-treillis inférieur distributif (donc un arbre enraciné, éventuellement vide), et est aussi un complexe qui partitionne la frontière de A .

Signalons en passant que l'inclusion $F_I(A) \subseteq \pi_I(A)$ est assez immédiate, et valable pour toute partie de \mathcal{Z}^m . En effet pour tout point $b \in F_I(A)$ il existe des points $a \in A$ arbitrairement proches de b , et en particulier tels que $|a_i - b_i| < 1$ pour tout $i \in I$. Pour un tel a on a $\pi_I(a) = b$, ce qui montre bien que $F_I(A) \subseteq \pi_I(A)$. L'autre inclusion en revanche utilise de façon cruciale le fait que A soit défini par des inégalités Ω -affines, car elle repose sur un lemme de nature géométrique. Ce dernier affirme, *mutatis mutandis*, que pour tout point $b \in \pi_I(A)$ il existe une demi-droite rationnelle incluse dans A et pointant vers b . L'inclusion $\pi_I(A) \subseteq F_I(A)$ en découle.

Proposition 1.2.4 (Dichotomie). *Soit A une partie¹⁴ de \mathcal{Z}^m définie par des inégalités Ω -affines. Soit f une fonction Ω -affine sur A , ayant en chaque point b d'une face $B = F_J(A)$ une limite $\bar{f}(b) \in \Omega$. Alors \bar{f} est encore une fonction Ω -affine sur B , et l'un des deux cas ci-dessous se produit :*

1. Ou bien \bar{f} est constamment égale à $+\infty$ sur B .
2. Ou bien $f = \bar{f} \circ \pi_J$.

Ce résultat peut sembler surprenant à première vue : il dit essentiellement que si $\bar{f} \neq +\infty$ sur B alors f est entièrement déterminée sur A par ses valeurs limites sur B . Toutefois, si on remplace A par un polytope réel et f par une fonction continue à valeurs dans un espace discret, par connexité f sera constante sur A , et cette constante sera aussi la valeur de \bar{f} en tout point de B . L'égalité $f = \bar{f} \circ \pi_J$ sera donc encore vraie, de façon triviale, dans ce cas. Néanmoins dans le contexte qui nous occupe A est tout sauf connexe : si la dichotomie est conservée, c'est seulement du fait de l'extrême rigidité des fonctions Ω -affines et des polytopes discrets.

Notons aussi que si la fonction f de la proposition 1.2.4 est à valeurs dans \mathcal{Z} et si $\bar{f} < +\infty$ alors bien entendu \bar{f} est encore à valeurs dans \mathcal{Z} . En revanche, même si f admet une définition de la forme

$$f(x_1, \dots, x_m) = \alpha_0 + \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i x_i \quad (1.3)$$

dans laquelle tous les coefficients sont entiers, rien ne garantit que ce soit encore le cas pour \bar{f} . C'est ce que montre l'exemple suivant, et c'est l'une des raisons pour lesquels il ne semble pas possible de se limiter aux fonctions \mathcal{Z} -affines (*i.e.* à coefficients entiers) dans la définition des polytopes discrets.

Exemple 1.2.5. Reprenons l'ensemble $A \subseteq \mathbb{Z}^3$ de l'exemple 1.2.2, défini par $0 \leq y \leq x$ et $z = 2x - 2y$. La fonction $f(x, y, z) = x - y$ se prolonge sur la face $B = F_{\{3\}}(A)$ en $\bar{f}(+\infty, +\infty, z) = z/2$. Celle-ci est bien à valeurs entières (et on vérifie en passant qu'on a bien $f = \bar{f} \circ \pi_{\{3\}}$), mais elle n'admet aucune définition sur B de la forme (1.3) à coefficients entiers.

13. On prend ici $A \subseteq \mathcal{Z}^m$ pour simplifier. Le même énoncé se généralise bien entendu à $A \subseteq F_I(\Gamma^m)$, en identifiant $F_I(\Gamma^m)$ à \mathcal{Z}^k avec $k = \text{Card } I$. Le résultat reste d'ailleurs valable même si la définition de A inclut aussi des conditions de congruences, voir [Darnière, 2017, proposition 3.3].

14. Voir note 13.

En combinant ces deux propositions on arrive à montrer le résultat suivant.

Proposition 1.2.6 (Présentation des faces). *Soit $A \subseteq \mathcal{Z}^m$ un polytope discret, et soit (μ, ν) une présentation de A . Alors toute face $B = F_I(A)$ est encore un polytope discret, son socle \widehat{B} est une face de \widehat{A} , et $(\widehat{\mu}|_{\widehat{B}}, \widehat{\nu}|_{\widehat{B}})$ est une présentation de B .*

Autrement dit, non seulement les faces d'un polytope discret A sont encore des polytopes discrets, mais en outre elles sont automatiquement munies d'une présentation héritée de celle de A par passage aux limites.

Notons qu'une partie de ce résultat est immédiate : si A est défini essentiellement par la condition $\mu(\widehat{a}) \leq a_m \leq \nu(\widehat{a})$ alors, comme on a supposé μ et ν largement continues, il suffit de passer à la limite pour voir que tout point b adhérent à A satisfait l'encadrement $\widehat{\mu}(\widehat{b}) \leq b_m \leq \widehat{\nu}(\widehat{b})$. La difficulté est seulement de vérifier la réciproque. C'est là que la proposition 1.2.4 de dichotomie joue son rôle, une fois qu'on a vérifié que le socle de toute face de A est une face de \widehat{A} .

1.2.3 Découpage monotopique

Parmi les polytopes réels de dimension fixée, les simplexes sont ceux qui ont le nombre minimum de facettes (faces propres maximales) [Brøndsted, 1983, corollaires 9.5 et 12.8].

Théorème 1.2.7. *Tout polytope $A \subseteq \mathbb{R}^m$ de dimension $d \neq 0$ possède au moins $d + 1$ facettes. Il en a exactement $d + 1$ si et seulement si c'est un simplexe.*

Pour un polytope discret A de dimension ¹⁵ $d \neq 0$, le plus petit nombre de facettes possible est simplement 1. En nous appuyant sur cette analogie, qui veut que les simplexes soient les polytopes ayant un nombre de facettes minimal, nous appellerons **simplexes discrets** les polytopes dont les faces forment une chaîne. Un simplexe discret a donc au plus une facette, qui est elle-même un simplexe.

Le découpage barycentrique [van den Dries, 1998, chapitre 8] permet de décomposer un polytope quelconque $A \subseteq \mathbb{R}^m$ en un complexe simplicial, assez librement pour respecter diverses contraintes. En particulier, si \mathcal{F} est un complexe simplicial raffinant celui des faces propres de A , il est possible de construire par découpage barycentrique une partition \mathcal{S} de A telle que :

- $\mathcal{S} \cup \mathcal{F}$ soit un complexe simplicial (contrainte sur les faces) ;
- tout $S \in \mathcal{S}$ dont une face touche la frontière de A se situe dans un « voisinage de ∂A », délimité à l'avance (contrainte de forme).

Le découpage monotopique n'est pas basé sur l'usage des barycentres, comme son homologue réel. Néanmoins il permet lui aussi de décomposer tout polytope discret en complexe simplicial en respectant ces deux types de contraintes.

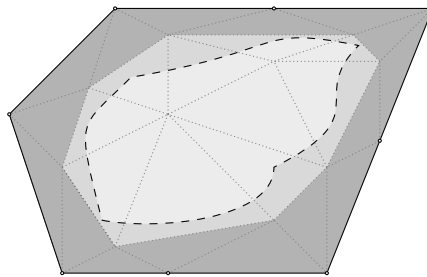


FIGURE 1.3 – Découpage barycentrique avec contraintes.

Pour tout $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $a \in \Gamma^m$ posons $\Delta_I(a) = \min_{i \notin I} a_i$. Intuitivement $\Delta_I(a)$ mesure l'inverse de la distance de a à $F_I(\Gamma^m)$: elle est d'autant plus grande que a est plus « proche » de $F_I(\Gamma^m)$, et

15. Il existe une notion de dimension pour les sous-ensembles définissables de \mathcal{Z}^m , voir [Cluckers, 2003]. Nous n'y aurons pas recours dans ce mémoire.

infinie si et seulement si a est adhérent à $F_I(\Gamma^m)$. Dans le cas particulier où $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, la distance de a à $F_I(\Gamma^m)$ est d'ailleurs exactement $d(a, \pi_I(a)) = 2^{-\Delta_I(a)}$ (où $d(a, b) = \max_{1 \leq i \leq m} |2^{-a_i} - 2^{-b_i}|$ est la distance usuelle sur Γ^m , plongé dans \mathbb{R}^m comme expliqué au début de la section 1.2.1).

Étant donné un polytope discret $A \subseteq \mathcal{Z}^m$ ayant une face B de support I , comme $B = F_I(A) = \pi_I(A)$ d'après la proposition 1.2.3, toute fonction $\varepsilon : B \rightarrow \mathcal{Z}$ détermine la forme d'un « voisinage » $V_\varepsilon(B)$ de B dans A défini par

$$V_\varepsilon(B) = \{a \in A \mid \Delta_I(a) \geq \varepsilon(\pi_I(a))\}.$$

Sur la figure 1.3 la courbe en pointillé représente la fonction ε , qui délimite le voisinage de ∂A formé par la réunion des différents $V_\varepsilon(T)$.

Théorème 1.2.8 (Découpage monotopique). *Soit $A \subseteq \Gamma^m$ un polytope discret, $\varepsilon : \partial A \rightarrow \mathcal{Z}$ une fonction définissable¹⁶ et \mathcal{T} un complexe de polytope discrets raffinant celui des faces propres de A . Alors il existe une partition \mathcal{S} de A en polytopes discrets ayant au plus une facette, qui satisfaisait les deux contraintes suivantes.*

1. $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ est un complexe.
2. Pour tout $T \in \mathcal{T}$ il existe un unique $S_T \in \mathcal{S}$ de facette T , et de plus $S_T \subseteq V_\varepsilon(T)$.

Ces deux contraintes sont l'exact analogue de celles représentées sur la figure 1.3, où les triangles les plus foncés seraient les S_T . La seule différence par rapport au cas réel, est qu'en plus les $S \in \mathcal{S}$ sont ici ouverts-fermés dans A puisque toutes leurs faces propres appartiennent à \mathcal{T} (donc se situe en dehors de A , dans ∂A).

Plus précisément, ces deux contraintes impliquent que pour tout $S \in \mathcal{S}$, ou bien S possède une facette T et dans ce cas $T \in \mathcal{T}$ et $S = S_T$, ou bien S n'a pas de facette du tout, et est donc ouvert-fermé dans \mathcal{Z}^m . En outre, si \mathcal{T} est un complexe simplicial, le complexe $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ donné par le théorème 1.2.8 de découpage monotopique est encore un complexe simplicial. Le résultat suivant s'en déduit facilement par récurrence.

Corollaire 1.2.9 (Décomposition simpliciale). *Soit $A \subseteq \mathcal{Z}^m$ une polytope discret, et \mathcal{A} l'ensemble de ses faces (A inclus). Alors \mathcal{A} peut se raffiner en un complexe simplicial.*

1.3 Triangulation p -adique

Pour tout entier $M \in \mathbb{N}^*$ notons $D^M R = R \cap (Q_{1,M}^\times \cup \{0\})$, et $D^M R^q = (D^M R)^q$ pour tout q . Les **polytopes** et **simplexes p -adiques** sont simplement définis comme la pré-image de ceux de Γ^q par la valuation de K , restreinte à $D^M R^q$ pour un certain $M \in \mathbb{N}^*$. Nous parlerons alors de polytopes d'**indice** M . Les **faces** d'un tel polytope $A \subseteq D^M R^q$ sont évidemment les pré-images de celles de $\nu(A)$, et tous les résultats de la section précédente se transposent sans difficulté aux simplexes et polytopes p -adiques.

Une famille finie \mathcal{T} de simplexes de $D^M R^q$ forme un complexe si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{T}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ est la réunion des faces communes de A et B (voir l'annexe 1). Cela implique notamment que les simplexes de \mathcal{T} sont tous disjoints. Plus généralement, nous appellerons **complexe simplicial p -adique** toute famille finie $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de complexes simpliciaux $\mathcal{T}_i \subseteq D^M R^{q_i}$ pour un certain $M \in \mathbb{N}^*$. Nous parlerons alors de complexe simplicial d'**indice** M . On notera que si les simplexes qui appartiennent à \mathcal{T}_i sont disjoints, en revanche les différents $\cup \mathcal{T}_i$ ne le sont pas forcément : c'est par abus de langage¹⁷ que j'appelle \mathcal{T} un complexe simplicial p -adique, puisque c'est en réalité une famille finie de complexes simpliciaux et non un complexe simplicial lui-même. Dans le même ordre

16. L'adjectif « définissable » est ici à prendre au sens suivant. Pour chacune des faces $F_I(A)$ qui composent ∂A , $F_I(\Gamma^m)$ s'identifie à \mathcal{Z}^k avec $k = \text{Card } I$, et la restriction de ε à $F_I(\Gamma^m)$ s'identifie à une fonction partielle ε_I de \mathcal{Z}^k dans \mathcal{Z} . On demande alors que chacune de ces fonctions ε_I soit définissable (au sens classique, voir l'annexe 2) dans la structure de groupe ordonné de \mathcal{Z} .

17. Cet abus de langage aurait pu être évité au prix d'une petite complication : traduire les simplexes des différents de \mathcal{T}_i dans des boules disjointes. Les deux solutions sont artificielles.

d'idée, on notera $\uplus \mathcal{T}$ ce qui n'est en fait que la réunion disjointe des $\cup \mathcal{T}_i$. De même nous parlerons des simplexes T appartenant à \mathcal{T} (au lieu de « appartenant à l'un des \mathcal{T}_i de \mathcal{T} »).

La clé de voûte des recherches présentées dans ce mémoire est le théorème 1.3.2 de triangulation des ensembles semi-algébriques p -adiques. Il affirme que tout ensemble semi-algébrique $A \subseteq K^m$ est semi-algébriquement homéomorphe à un complexe simplicial p -adique. En outre il s'accompagne d'un théorème de monomialisation des fonctions semi-algébriques dont l'énoncé demande encore quelques définitions.

Pour tout entier $e \geq 1$ on note $U_e = \{x \in K \mid x^e = 1\}$ l'ensemble des racines e^{es} de l'unité dans K , et $U_{e,n}$ la réunion des boules $B(x, \pi^n)$, de centre $x \in U_e$ et de rayon π^n . Notons qu'il s'agit à la fois d'un voisinage de U_e (d'autant plus petit que n est plus grand) et d'un groupe multiplicatif, sous-groupe de K^\times et produit des groupes U_e et $B(1, \pi^n) = 1 + \pi^n R$.

$$U_{e,n} = U_e \cdot (1 + \pi^n R)$$

Par analogie avec la notation de Landau $\mathcal{O}_a((x-a)^n)$ des développements limités, nous noterons $\mathcal{U}_{e,n}(x)$ toute fonction semi-algébrique à valeurs dans $U_{e,n}$. Plus précisément, étant données deux fonctions semi-algébriques f et g , nous dirons que $f = \mathcal{U}_{e,n}g$ sur une partie A de leurs domaines, s'il existe une fonction semi-algébrique $\eta : A \rightarrow U_{e,n}$ telle que $f = \eta g$. De manière équivalente (grâce à l'existence de fonctions de Skolem pour les ensembles semi-algébriques p -adiques), pour tout $x \in A$

$$f(x) = \mathcal{U}_{e,n}(x)g(x) \iff f(x) = \chi(x) \cdot (1 + \pi^n \omega(x)) \cdot g(x)$$

où $\chi : A \rightarrow U_e$ et $\omega : A \rightarrow R$ sont semi-algébriques.

Remarque 1.3.1. Tout comme dans la décomposition cellulaire de Denef-Cluckers (voir la remarque 1.1.6), la condition $f = \mathcal{U}_{e,n}g$ est une propriété d'*approximation uniforme* sur A de f par g modulo $U_{e,n}$ (ou de f par $g\chi$ modulo $U_{1,n}$), au sens où pour tout¹⁸ $x \in A$.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)\chi(x)} - 1 \right| \leq |\pi^n|. \quad (1.4)$$

On voit que le rôle de l'entier n est de contrôler la précision de cette approximation.

Nous dirons qu'une fonction semi-algébrique g est N -**monomiale** sur $A \subseteq K^q$ si

$$\forall x = (x_1, \dots, x_q) \in A, \quad g(x) = \xi \prod_{1 \leq i \leq q} x_i^{N\alpha_i}$$

pour un certain $\xi \in K$ et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{Z}$ (avec la convention habituelle 0^0 si nécessaire). Enfin nous dirons qu'une fonction semi-algébrique f est N -**monomiale modulo** $U_{e,n}$ sur A si $f = \mathcal{U}_{e,n}g$ sur A pour une certaine fonction semi-algébrique g , N -monomiale sur A .

Théorème 1.3.2. *Étant donnée une famille finie de fonctions semi-algébriques $(\theta_i : A_i \subseteq K^m \rightarrow K)_{i \in I}$ et deux entiers $n, N \geq 1$ fixés, il existe des entiers $e, M \geq 1$, un complexe simplicial \mathcal{T} d'indice M et un homéomorphisme semi-algébrique $\varphi : \uplus \mathcal{T} \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$ tels que, pour tout $i \in I$:*

1. (Triangulation de A_i) L'ensemble $\mathcal{T}(A_i) = \{\varphi(T) \mid T \in \mathcal{T} \text{ et } \varphi(T) \subseteq A_i\}$ est une partition de A_i ;
2. (Monomialisation de θ_i) Pour tout $T \in \mathcal{T}(A_i)$, $\theta_i \circ \varphi|_T$ est N -monomiale modulo $U_{e,n}$.

En outre les entiers e, M peuvent être choisis arbitrairement grands au sens suivant : si $e_*, M_* \geq 1$ sont deux entiers supplémentaires fixés au départ, on peut exiger que e_* divise e et que $M_* \leq M$.

¹⁸. Nous utilisons ici la convention que $f(x)/g(x) = 1$ en tout point où $f(x) = g(x) = 0$. La condition (1.4) pour tout $x \in A$ implique donc que $f(x) = 0$ en tout point de A où $g(x) = 0$.

J'appelle un tel couple (\mathcal{T}, φ) une **triangulation** des A_i , ou une **monomialisation** des θ_i , de **paramètres** (n, N, e, M) .

On peut observer deux différences principales entre ce théorème et celui de triangulation réelle. Tout d'abord les complexes simpliciaux impliqués vivent dans des espaces K^q dont la dimension est *a priori* bien plus grande que celle de l'espace de départ K^m . Ceci complique un peu la démonstration, mais n'apporte aucune gêne dans les applications. D'autre part, il n'y a pas d'analogue réel aux paramètres (n, N, e, M) de cette triangulation p -adique. Ces quatre entiers jouent des rôles bien spécifiques et très différents, qu'on peut détailler comme suit.

- n mesure la précision de l'approximation de $\theta_i \circ \varphi|_T$ par une fonction N -monomiale (voir la remarque 1.3.1). Plus il est grand, meilleure est cette approximation.
- N ne sert à rien en tant que tel : 1-monomialiser les θ_i est suffisant en pratique. Néanmoins la N -monomialisation est une propriété légèrement plus forte qui s'avère nécessaire pour la preuve du théorème (par récurrence).
- e est une contrainte héritée de la décomposition cellulaire de Denef : il aurait été plus agréable que $e = 1$, une approximation modulo $U_{1,n}$ étant plus précise qu'une approximation modulo $U_{e,n}$ (puisque $U_{1,n} \subseteq U_{e,n}$). On n'a donc *a priori* aucun intérêt, même si on peut le faire, à augmenter e dans la conclusion du théorème.
- À l'inverse, augmenter M dans la conclusion peut s'avérer utile dans la mesure où, quand M est plus grand, l'espace $D^M R^q$ où vivent les simplexes est plus petit et possède de meilleures propriétés. Rappelons en effet que, dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p$ pour simplifier,

$$D^M R \setminus \{0\} = Q_{1,M}^\times \cap \mathbb{Z}_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} p^k (1 + p^M \mathbb{Z}_p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(p^k, p^{k+M})$$

est un voisinage de $\{p^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'autant plus précis que M est plus grand. En outre les fonctions $x \mapsto x^k$ sont injectives sur $D^M R$ dès que M devient assez grand (précisément pour $M > \nu(k)$ car alors $D^M R^\times \subseteq Q_{1,\nu(k)+1}^\times$, voir le lemme 1.1.3).

La preuve du théorème 1.3.2 de triangulation p -adique se fait par récurrence sur la dimension m de l'espace de départ K^m . Nous noterons \mathbf{T}_m l'énoncé du théorème dans ce cas. Il est trivialement vrai si $m = 0$. On suppose donc qu'il est démontré pour un entier $m \geq 0$ et on se donne une famille $(\theta_i : A_i \subseteq K^{m+1} \rightarrow K)_{i \in I}$ de fonctions semi-algébriques ainsi que deux entiers $n, N \geq 1$ comme dans l'énoncé de \mathbf{T}_{m+1} . En utilisant l'homéomorphisme défini sur K par

$$x \mapsto \begin{cases} \pi x & \text{si } x \in R \\ 1 + x^{-1} & \text{si } x \in K \setminus R \end{cases}$$

on se ramène facilement au cas où les A_i sont inclus dans R^{m+1} . En prolongeant les θ_i par une valeur arbitraire on peut donc supposer que toutes les fonctions θ_i vont de R^{m+1} dans K .

On cherche alors à préparer les θ_i à la monomialisation, grâce à la décomposition cellulaire combinée à notre hypothèse de récurrence. Le théorème 1.1.4 donne une partition \mathcal{C} de R^{m+1} en cellules A sur chacune desquelles les θ_i se factorisent sous la forme

$$\theta_i(x, t) = \mathcal{U}_{e,n}(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{a}{e}}. \quad (1.5)$$

L'idée est de construire d'abord une monomialisation des fonctions h (par \mathbf{T}_m), puis de l'étendre aux fonctions $t - c_A(x)$ et finalement aux θ_i . Dans le même temps on s'arrange pour faire en sorte que la famille \mathcal{C} ressemble le plus possible à un complexe cellulaire : que ses cellules soient largement continues, qu'elles forment un monoplexe, et d'autres petites choses que nous allons détailler. C'est toute cette préparation, ou au moins ses grandes lignes, qui est présentée dans la suite de cette section.

1.3.1 Étape 1 : Décomposition cellulaire largement continue

La première difficulté qui surgit, quand on essaye de préparer les fonctions θ_i à la monomialisation comme on l'a dit plus haut, est que la préparation des fonctions semi-algébrique par la décomposition cellulaire classique (théorème 1.1.4) ne dit absolument rien sur ce qui se passe *au bord* des

cellules. En particulier, il se trouve que les centres et bornes des cellules d'une telle décomposition ne sauraient être tous largement continus en général.

Exemple 1.3.3. Soit $X = \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = zx \text{ et } x \neq 0\}$, et soit θ la fonction indicatrice de X . Soit \mathcal{A} une partition quelconque de R^3 en cellules sur chacune desquelles θ se factorise comme en (1.5). Alors toute cellule $A \in \mathcal{A}$ est nécessairement incluse dans X ou disjointe de X (car $\theta(x) = 1$ sur X et est nulle partout ailleurs). Celles qui sont incluses dans X ont pour centre la fonction y/x , qui n'est pas largement continue au voisinage de $(0, 0)$.

Pour éviter cet écueil, on commence donc par « déformer » légèrement les fonctions θ_i en les remplaçant par les fonctions $\theta_i \circ u_\eta$ définies ci-après. Pour tout $\eta \in K^m$ et tout $(x, t) \in K^m \times K$, on pose

$$u_\eta(x, t) = (x + t\eta, t).$$

Ceci définit un automorphisme linéaire u_η de K^{m+1} , d'autant plus proche de l'identité (au sens usuel, de la norme des applications linéaires) que $\|\eta\|$ est plus petit. La déformation des θ_i introduite par u_η est donc d'autant moins grande que $\|\eta\|$ est plus petit.

En reprenant pas à pas la preuve du théorème 1.1.4 de décomposition cellulaire, on peut à l'aide de \mathbf{T}_m montrer le résultat suivant de « décomposition cellulaire largement continue à petite déformation près ».

Théorème 1.3.4. Soit $(\theta_i : A_i \subseteq K^{m+1} \rightarrow K)$ une famille finie de fonctions semi-algébriques dont les domaines A_i sont bornés. Il existe un entier $e \geq 1$ ayant la propriété suivante.

Pour tout entier $n \geq 1$ il existe, pour un certain $N \geq 1$ multiple de e , un automorphisme linéaire u_η de K^{m+1} comme ci-dessus (avec $\eta \in K^m$) et, pour un certain $M > 2v(e)$, une famille finie \mathcal{D} de cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ ajustées et largement continues, tels que \mathcal{D} est un raffinement de $\{u_{\eta^{-1}}(A_i)\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$ on a, sur toute cellule¹⁹ $D \in \mathcal{D}$ contenue dans A_i ,

$$\theta_i \circ u_\eta(x, t) = \mathcal{U}_{e,n}(x, t) \cdot h(x) [\lambda_D^{-1}(t - c_D(x))]^{\frac{\alpha}{e}} \quad (1.6)$$

où $h : \hat{D} \rightarrow K$ est une fonction semi-algébrique et $\alpha \in \mathbb{Z}$ (dépendants de i et D).

De plus :

- si on se donne au départ des entiers $e_*, N_*, M_* \geq 1$ quelconques, on peut exiger que e soit multiple de e_* , que N soit multiple de eN_* et que $M > M_*$;
- une fois e, n et N fixés, l'ensemble des $\eta \in K^m$ qui conviennent est Zariski dense, et $\|\eta\|$ peut donc être pris arbitrairement petit.

Sans entrer dans le détail de la preuve, qui repose avant tout sur celle de la décomposition cellulaire de Denef, il est éclairant d'introduire ici les deux notions supplémentaires utilisées : celle de « bonne direction » et celle de « fonction presque largement continue ».

Étant donnée une famille finie \mathcal{F} de polynômes en $m+1$ variables à coefficients dans K , une **bonne direction** pour \mathcal{F} sur K est un point projectif $x = [x_1, \dots, x_{m+1}]$ tel que l'ensemble des zéros de \mathcal{F} dans K^{m+1} ne contient aucune droite de K^{m+1} dirigée par x . Elle est **géométriquement bonne** pour \mathcal{F} si elle est bonne pour \mathcal{F} sur toute extension algébrique de K .

Si une fonction $f : A \subseteq K^m \rightarrow K$ est largement continue, alors elle se prolonge en une fonction continue $\tilde{f} : \overline{A} \rightarrow K$, dont le graphe n'est autre que l'adhérence du graphe de f . En particulier les fibres de la projection de Graphe f sur K^m sont toutes des singletons. Nous dirons que f est **presque largement continue** si les fibres de la projection de Graphe f sur K^m sont toutes finies.

Le théorème de décomposition cellulaire considère une famille finie \mathcal{A} de parties semi-algébriques de K^{m+1} . Chaque $A \in \mathcal{A}$ peut s'exprimer comme une combinaison Booléenne d'ensembles de la forme $f^{-1}(P_N^\times)$, pour un certain $N \geq 1$, avec f un polynôme non nul à coefficients

19. Comme $e|N$ et $m > 2v(e)$, $[\lambda_D^{-1}(t - c_D(x))]^{\frac{\alpha_{i,D}}{e}}$ est bien définie sur D (voir la remarque 1.1.5).

dans K . Soit \mathcal{F} l'ensemble de tous ces polynômes. Denef produit alors dans sa preuve une partition finie \mathcal{C} de $\bigcup \mathcal{A}$ en cellules modulo P_N^\times , telle que toute partie $A \in \mathcal{A}$ est réunion des $C \in \mathcal{C}$ qu'elle contient.

Considérons maintenant $\mathcal{A}_\eta = \{u_\eta^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, pour un certain $\eta \in K^m$. Si $A = f^{-1}(P_N^\times)$ alors bien sûr $u_\eta^{-1}(A) = (f \circ u_\eta)^{-1}(P_N^\times)$. Or $f \circ u_\eta$ est encore une fonction polynomiale à coefficients dans K . La construction de Denef s'applique donc aussi bien à \mathcal{A}_η et fournit une décomposition cellulaire \mathcal{C}_η de $\bigcup \mathcal{A}_\eta$ qui raffine \mathcal{A}_η . Le point clé pour la preuve du théorème 1.3.4 réside alors dans le lemme suivant.

Lemme 1.3.5. *Avec les notations ci-dessus, si $[\eta, 1]$ est une direction géométriquement bonne pour \mathcal{F} , alors les centres et les bornes de toutes les cellules de \mathcal{C}_η sont presque largement continues.*

La triangulation p -adique permet de montrer (voir le corollaire 1.3.16) que toute fonction presque largement continue dont le graphe est borné, est largement continue par morceaux. Il est alors facile, en raffinant la décomposition cellulaire fournie par le lemme ci-dessus, d'en déduire que si $\bigcup \mathcal{A}$ est bornée alors \mathcal{A}_η admet une décomposition en cellules largement continues, puis d'aboutir par quelques raffinements supplémentaires au théorème 1.3.4.

1.3.2 Étape 2 : Monoplexes cellulaires

L'étape précédente nous a ramenés au cas où les fonctions θ_i sont définies sur R^{m+1} . Le théorème 1.3.4 nous a fourni un $\eta \in K^m$, des entiers e, n, N, M et une partition finie \mathcal{D} de $u_\eta^{-1}(R^{m+1})$ en cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ largement continues et ajustées, sur lesquelles les fonctions $\theta_i \circ u_\eta$ se factorisent comme en (1.6). En outre, quitte à prendre $\|\eta\|$ assez petit, on peut supposer que $u_\eta^{-1}(R^{m+1}) = R^{m+1}$. Le but est maintenant de raffiner cette partition \mathcal{D} de R^{m+1} pour la faire ressembler le plus possible à un complexe simplicial, tout en conservant sur chaque cellule une factorisation des θ_i du même type que (1.6).

Pour cela, on introduit d'abord la notion de « \triangleleft^n -raffinement ». Étant données deux cellules B, A dans K^{m+1} , on écrit que $B \triangleleft^n A$ si $B \subseteq A$ et s'il existe une fonction semi-algébrique $h_{B,A} : \hat{B} \rightarrow K$ telle que

$$t - c_A(x) = \mathcal{U}_n(x, t) \cdot h_{B,A}(x) \quad \text{ou} \quad t - c_A(x) = \mathcal{U}_n(x, t) \cdot (t - c_B(x))$$

sur B . Les deux cas peuvent se ré-écrire sous la forme commune

$$t - c_A(x) = \mathcal{U}_n(x, t) \cdot h_{B,A}(x)^\alpha \cdot (t - c_B(x))^{1-\alpha} \quad (1.7)$$

avec $\alpha \in \{0, 1\}$. Dans ce cas la fonction $h_{B,A}$ est appelée une « \triangleleft^n -transition de (B, A) ». Si \mathcal{B}, \mathcal{A} sont deux familles de cellules telles que $B \triangleleft^n A$ pour tout $(B, A) \in \mathcal{B} \times \mathcal{A}$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$, on dit que \mathcal{B} est un « \triangleleft^n -raffinement de \mathcal{A} » et on le note $\mathcal{B} \triangleleft^n \mathcal{A}$. On appelle alors **système complet de \triangleleft^n -transitions** pour $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ la donnée d'une « \triangleleft^n -transition pour chaque paire (B, A) concernée.

Remarque 1.3.6. L'intérêt d'un « \triangleleft^n -raffinement \mathcal{B} de \mathcal{A} » est que si les fonctions θ_i se factorisent comme dans (1.6) sur chaque $A \in \mathcal{A}$, alors elles conservent par (1.7) une factorisation du même type sur chaque $B \in \mathcal{B}$.

Nous allons donc chercher un « \triangleleft^n -raffinement \mathcal{E} de \mathcal{D} » dont la structure (combinatoire et topologique) soit la plus proche possible d'un complexe simplicial p -adique. En particulier, on attend d'un tel raffinement qu'il satisfasse les deux conditions suivantes.

- Les faces de tout simplexe p -adique formant une chaîne, les complexes simpliciaux p -adiques sont des monoplexes. On voudrait donc que \mathcal{E} soit un monoplexe.
- Toute présentation d'un simplexe p -adique fournit par passage aux limites une présentation de chacune de ses faces, *via* la proposition 1.2.6. On voudrait donc aussi que pour toutes $F, E \in \mathcal{E}$ telles que $F \leq E$, le centre et les bords de F se déduisent de ceux de E par passage aux limites.

Cette dernière condition nécessite d'être précisée. On introduit pour cela la notion de « complexe cellulaire », définie comme suit. Étant donnée une cellule $A \subseteq K^{m+1}$ modulo \mathbb{G} (pour un sous-groupe \mathbb{G} de K^\times fixé), largement continue et bornée, de support $X \subseteq K^m$, pour tout $Y \subseteq \overline{X}$, l'ensemble $\overline{A} \cap (Y \times K)$ est formé des $(x, t) \in Y \times K$ tels que

$$|\bar{\mu}_A(x)| \leq |t - \bar{c}_A(x)| \leq |\bar{\nu}_A(x)| \quad \text{et} \quad t - \bar{c}_A(x) \in \overline{\lambda_A \mathbb{G}}. \quad (1.8)$$

C'est une cellule au sens général, mais pas au sens un peu restrictif de nos cellules présentées. Néanmoins si Y est choisi de sorte que $\bar{\mu}_A$ et $\bar{\nu}_A$ soient ou bien identiquement nulles ou bien jamais nulles sur Y (indépendamment l'un de l'autre), alors $\overline{A} \cap (Y \times K)$ peut se décomposer en réunion disjointe de cellules présentées $\partial_Y^0 A$ ou $\partial_Y^1 A$ (ou \emptyset) définies comme suit (voir aussi la figure 1.4).

- $\partial_Y^0 A = (\bar{c}_{A|_Y}, 0, 0, 0)$ si $\bar{\nu}_A = 0$ sur Y , et $\partial_Y^0 A = \emptyset$ sinon;
- $\partial_Y^1 A = (\bar{c}_{A|_Y}, \bar{\nu}_{A|_Y}, \bar{\mu}_{A|_Y}, \lambda_A)$ si $\bar{\mu}_A$ ne s'annule pas sur Y , et $\partial_Y^1 A = \emptyset$ sinon.

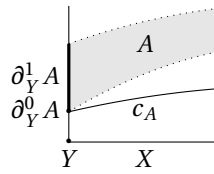


FIGURE 1.4 – Pseudo-faces de A : $\partial_Y^0 A$, $\partial_Y^1 A$ et $A = \partial_X^1 A$

Nous appellerons **complexe cellulaire fermé** modulo \mathbb{G} toute famille finie \mathcal{A} de cellules modulo \mathbb{G} dans K^{m+1} , deux à deux disjointes, ajustées et largement continues, tel que $\bigcup \mathcal{A}$ est fermé, que l'ensemble $\widehat{\mathcal{A}}$ des socles des cellules de \mathcal{A} forme un complexe fermé dans K^m , et que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, si $B \cap \overline{A} \neq \emptyset$ alors $B = \partial_Y^0 A$ ou $B = \partial_Y^1 A$ avec $Y = \widehat{B}$. Un **complexe cellulaire** est simplement un sous-ensemble quelconque d'un complexe cellulaire fermé. Si de plus \mathcal{A} est un monoPLEXE (voir l'annexe 1) on parlera bien sûr de **monoPLEXE cellulaire**.

Remarque 1.3.7. Le seul fait que \mathcal{A} soit un complexe fermé garantit que l'adhérence de chaque cellule $A \in \mathcal{A}$ est réunion disjointe des $B \in \mathcal{A}$ telles que $B \leq A$. Nous les appellerons les **pseudo-faces** de A relativement à \mathcal{A} . Si de plus \mathcal{A} est un complexe cellulaire fermé, ces pseudo-faces sont exactement les $\partial_Y^0 A$ et $\partial_Y^1 A$ non vides, pour $Y \in \widehat{\mathcal{A}}$. En particulier, dans ce cas, les pseudo-faces de A relativement à \mathcal{A} sont déterminées par la seule donnée de A et des pseudo-faces de \widehat{A} relativement à $\widehat{\mathcal{A}}$. En outre ces pseudo-faces ont *par définition* une présentation héritée de celle de A par passage aux limites, exactement comme les faces d'un polytope S (discret ou p -adique) ont une présentation héritée de celle de S (cf. la proposition 1.2.6 de « présentation des faces »).

Théorème 1.3.8. Soit \mathbb{G} un sous-groupe de K^\times , semi-algébrique, d'indice fini et ouvert dans K^\times . Soit \mathcal{A} une famille finie de cellules modulo \mathbb{G} dans K^{m+1} , bornées, largement continues et ajustées. Pour tout entier $n \geq 1$ il existe un monoPLEXE cellulaire \mathcal{E} modulo \mathbb{G} tel que $\mathcal{E} \triangleleft^n \mathcal{A}$

Une fois appliqué le théorème 1.3.8 à la famille \mathcal{D} de cellules modulo $Q_{N,M}^\times$ produite à l'étape 1, on dispose d'une partition \mathcal{E} de R^{m+1} formée par un monoPLEXE cellulaire modulo $Q_{N,M}^\times$, tel que sur chaque $E \in \mathcal{E}$ les fonctions $\theta_i \circ u_\eta$ se factorisent comme en (1.6) :

$$\theta_i \circ u_\eta(x, t) = \mathcal{U}_{e,n}(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_E^{-1}(t - c_E(x))]^{\frac{\alpha}{e}}$$

Notons \mathcal{F} l'ensemble de ces fonctions h , augmenté de l'ensemble des fonctions (bornes et centres) intervenant dans les présentations des cellules de \mathcal{E} .

Un cercle vicieux. Pour préparer la monomialisation des $\theta_i \circ u_\eta$ on pourrait penser qu'il est temps d'appliquer l'hypothèse de récurrence \mathbf{T}_m afin de construire une monomialisation (\mathcal{T}, ψ) de \mathcal{F} . Le problème est que l'image de \mathcal{T} par ψ n'est alors plus $\widehat{\mathcal{E}}$ mais un certain monoplexe \mathcal{X} raffinant $\widehat{\mathcal{E}}$. On peut alors remplacer \mathcal{E} par le raffinement vertical induit par \mathcal{X} , c'est-à-dire l'ensemble des $E \cap (X \times K)$ pour $E \in \mathcal{E}$ et $X \in \mathcal{X}$ inclus dans \widehat{E} ; mais alors la famille \mathcal{E}' ainsi obtenue n'est plus un monoplexe cellulaire. Certes, on peut encore appliquer le théorème 1.3.8 à \mathcal{E}' pour le raffiner en un monoplexe cellulaire \mathcal{E}'' . Mais cela introduit de nouvelles cellules, donc de nouvelles fonctions h pour la factorisation des θ_i sur ces cellules, bref un nouvel ensemble de fonctions pour lesquelles (\mathcal{T}, ψ) n'est plus une monomialisation : c'est une histoire sans fin.

Pour en sortir il faut faire marche arrière, repartir du début de l'étape 2, et construire *simultanément* : (1) un \triangleleft^n -raffinement \mathcal{E} de \mathcal{D} qui soit un monoplexe cellulaire, et ; (2) une monomialisation de toutes les fonctions impliquées dans la factorisation des $\theta_i \circ u_\eta$, dans la présentation des cellules de \mathcal{E} et dans un système complet de \triangleleft^n -transitions de $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$. C'est l'objet du lemme technique suivant, au cœur de la triangulation, dont le théorème 1.3.8 n'est qu'une version simplifiée.

Lemme 1.3.9. *Soit \mathbb{G} un sous-groupe de K^\times , semi-algébrique, d'indice fini et ouvert dans K^\times . Soit \mathcal{A} une famille finie de cellules modulo \mathbb{G} dans K^{m+1} , bornées, largement continues et ajustées. Soit \mathcal{F} une famille finie de fonctions définissables, dont les domaines de définition sont pris dans $\widehat{\mathcal{A}}$. Enfin soient $n, N \geq 1$ des entiers quelconques.*

On peut trouver des entiers $e \geq 1$ et $M > 2v(e)$ arbitrairement grands (au sens du théorème 1.3.2), et un quadruplet $(\mathcal{T}, \psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}_\mathcal{E})$ ayant les propriétés suivantes :

- \mathcal{E} est un monoplexe cellulaire modulo \mathbb{G} formant un \triangleleft^n -raffinement de \mathcal{A} .
- $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ est un système complet de \triangleleft^n -transitions pour $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$.
- (\mathcal{T}, ψ) est une monomialisation de paramètres (n, N, e, M) de toutes les fonctions de \mathcal{F} , de $\mathcal{F}_\mathcal{E}$, ainsi que des centres et bornes de toutes les cellules de \mathcal{E} . En outre $\psi(V) = \widehat{\mathcal{E}}$.

Cette construction, laborieuse, se fait par récurrence en commençant par les cellules minimales (pour l'ordre de spécialisation). De manière informelle on peut en décrire les étapes clés comme suit.

1. On rajoute à \mathcal{A} toutes les cellules possibles du type $\partial_Y^i A$ pour $A \in \mathcal{A}$, $Y \in \widehat{\mathcal{A}}$, $i \in \{0, 1\}$, et on construit un \triangleleft^n -raffinement de cette famille augmentée (par des techniques empruntées à Denef). On se ramène ainsi au cas où $\bigcup \mathcal{A}$ est fermé, $\bigcup \widehat{\mathcal{A}}$ est un complexe, et pour chaque $B \leq A \in \mathcal{A}$ on a $B \triangleleft^n \partial_Y^0 A$ ou $B \triangleleft^n \partial_Y^1 A$ avec $Y = \widehat{B}$.
2. On ajoute à \mathcal{F} les \triangleleft^n -transitions, données par la condition précédente, de toutes les paires $A, B \in \mathcal{A}$ telles que $B \leq A$. On y ajoute également les centres et bornes de toutes les cellules de \mathcal{A} . \mathbf{T}_m donne une monomialisation (\mathcal{T}, ψ) de \mathcal{F} de paramètres (n, N, e, M) , pour certains entiers e et M pouvant être choisis arbitrairement grands. En outre, quitte à remplacer \mathcal{A} par l'ensemble des $A \cap (\psi(S) \times K)$ pour $A \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{T}$ tels que $\psi(S) \subseteq \widehat{A}$, on peut supposer que $\psi(\mathcal{T}) = \widehat{\mathcal{A}}$.
3. Ensuite, partant d'une cellule $A \in \mathcal{A}$ de socle X , on considère l'ensemble \mathcal{B} des cellules de \mathcal{A} qui rencontrent ∂A . Par hypothèse de récurrence on suppose que \mathcal{B} est un monoplexe, que $\mathcal{B} \triangleleft^n \mathcal{A}$, et que (\mathcal{T}, ψ) est une monomialisation des centres et bornes des cellules de \mathcal{B} , ainsi que des \triangleleft^n -transitions de $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. On construit alors une partition finie \mathcal{E}_A de A en cellules E telles que $E \triangleleft^n A$, en faisant en sorte que :
 - (a) $\mathcal{B} \cup \mathcal{E}_A$ soit un monoplexe cellulaire.
 - (b) Les socles de ces nouvelles cellules soient les images par ψ d'un complexe simplicial \mathcal{T}_A , construit à partir de \mathcal{T} par découpage monotopique²⁰ de $\psi^{-1}(\widehat{A})$.
 - (c) Les centres et bornes de ces nouvelles cellules E soient construits en prolongeant à \widehat{E} ceux des cellules de B , à l'aide d'une rétraction (théorème 1.3.12). C'est ce qui permet de garantir à la fois que $\mathcal{B} \cup \mathcal{E}_A$ est un monoplexe cellulaire, et que (ψ, \mathcal{T}_A) est aussi une monomialisation des centres et bornes de E , ainsi que des \triangleleft^n -transitions de (E, A) .

20. Le découpage monotopique des simplexes discrets (théorème 1.2.8) se relève en un découpage monotopique des simplexes p -adiques.

Une fois cela fait, il ne reste qu'à remplacer \mathcal{A} et \mathcal{T} par $\mathcal{A}' = (\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup \mathcal{E}_A$ et \mathcal{T}_A , et à recommencer. De proche en proche, on finit par remplacer \mathcal{A} tout entier par un \triangleleft^n -raffinement \mathcal{E} qui est un monoïxe cellulaire, et \mathcal{T} par un complexe simplicial plus fin \mathcal{T}' tel que (ψ, \mathcal{T}') ait toutes les propriétés voulues.

La construction de \mathcal{E}_A à partir de A et \mathcal{B} se fait en plusieurs étapes, détaillées ci-après, dépendant de la configuration de A et de son socle X . Elle utilise en plusieurs points l'hypothèse de récurrence \mathbf{T}_m . En particulier, quand X n'est pas fermé, \mathbf{T}_m fournit une rétraction semi-algébrique σ de X sur ∂X qui est utilisée dans la construction.

Cas 1. X est fermé et $v_A \neq 0$. Alors A est fermée (donc minimale dans \mathcal{A} , c'est l'étape d'initialisation). On prend $\mathcal{E}_A = \{A\}$.

Cas 2. X est fermé et $v_A = 0$. On prend $\mathcal{E}_A = \{A, E\}$ avec $E = \partial_X^0 A$ (la cellule sous-jacente est le graphe de c_A , qui est ici la frontière de A).

Dans tous les cas qu'il reste à traiter X n'est pas fermé donc $\partial X = \bar{Y}$, pour un certain $Y \in \widehat{\mathcal{A}}$ (parce que \mathcal{A} est un monoïxe).

Cas 3. $\mu_A = 0$. La cellule sous-jacente à A est le graphe de c_A , et comme $\widehat{\mathcal{A}}$ est un monoïxe il est facile de voir que $\mathcal{B} \cup \{A\}$ est un monoïxe. On prend donc $\mathcal{E}_A = \mathcal{B} \cup \{A\}$ dans ce cas.

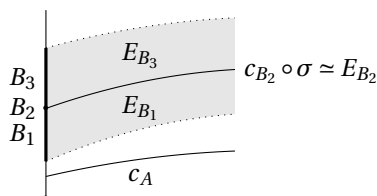
Dans tous les cas qu'il reste à traiter $\mu_A \neq 0$ sur X . Chaque configuration possible est illustrée par un dessin dans lequel A est représenté par un domaine grisé, ses bornes par des lignes pointillées, X par l'axe horizontal, Y par le point à l'extrémité gauche de X , et $Y \times K$ par l'axe vertical. Les cellules de \mathcal{B} sont incluses dans $\bar{A} \cap (Y \times K)$ pour la plupart (il n'y manque que $\partial_X^0 A$, c'est-à-dire le graphe de c_A , dans le cas où $v_A = 0$).

Cas 4. $\bar{\mu}_A = 0$ sur Y .



Si $v_A \neq 0$ (figure de gauche) on prend $\mathcal{E}_A = \{A\}$, sinon (figure de droite) $\mathcal{E}_A = \{A, \partial_X^0 A\}$.

Cas 5. $0 < |\bar{v}_A| \leq |\bar{\mu}_A|$ sur Y .



Dans cette étape plus difficile, on « élargit » chaque cellule $B \in \mathcal{B}$ en une cellule $E_B \subseteq A$, en faisant en sorte que la famille $\mathcal{E}_A = \{E_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ forme une partition de A . Cet élargissement utilise la rétraction σ de X sur Y donnée par \mathbf{T}_m , chaque cellule E_B étant définie par

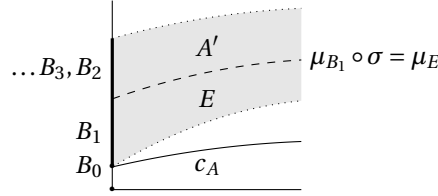
$$E_B = (c_B \circ \sigma, v_B \circ \sigma, \mu_B \circ \sigma, \lambda_B).$$

Par exemple sur la figure ci-dessus, B_2 est de type 0. On prend donc pour E_{B_2} la cellule de type 0 et de centre $c_{B_2} \circ \sigma$.

Bien sûr il n'y a aucune raison *a priori* pour que ces cellules E_B soient incluses dans A . En réalité c'est le cas seulement pour leurs restrictions à un voisinage de Y , mais un raffinement approprié de \mathcal{S} par découpage monotopique de $\psi^{-1}(\widehat{A})$ permet de résoudre cette difficulté.

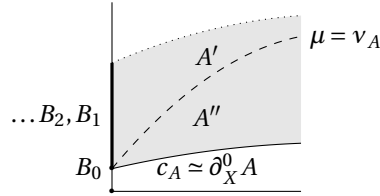
Par ailleurs le fait que $E_B \triangleleft^n A$ découle de ce que, au départ, on a fait en sorte que $B \triangleleft^n \partial_Y^1 A$. Plus précisément, on a fait en sorte que $B \triangleleft^n \partial_Y^1 A$ ou $B \triangleleft^n \partial_Y^0 A$ pour toute cellule $B \in \mathcal{A}$ de socle Y telle que $B \leq A$, et cette propriété reste valable pour les cellules $B \in \mathcal{B}$ parce que $\mathcal{B} \triangleleft^n \mathcal{A}$.

Cas 6. $0 = |\tilde{\nu}_A| < |\bar{\mu}_A|$ sur Y et $\nu_A \neq 0$.



On peut montrer que $B_0 := \partial_Y^0 A \in \mathcal{B}$ et qu'il existe une unique cellule $B_1 \in \mathcal{B}$ de socle Y qui touche B_0 . On prolonge la fonction μ_{B_1} en une fonction $\mu_E = \mu_{B_1} \circ \sigma : X \rightarrow K$, qu'on utilise pour scinder A en deux cellules E et A' de centre c_A : la première constituée des points (x, t) de A tels que $|t - c_A(x)| \leq |\mu_E(x)|$, et l'autre du reste. La construction du cas précédent s'applique à A' et en fournit une partition $\mathcal{E}_{A'}$. On pose alors $\mathcal{E}_A = \{E\} \cup \mathcal{E}_{A'}$.

Cas 7. $0 = |\tilde{\nu}_A| < |\bar{\mu}_A|$ sur Y et $\nu_A = 0$.



Comme indiqué sur le dessin on découpe la cellule A en deux cellules A' et A'' , à l'aide cette fois d'une fonction $\mu : X \rightarrow K$ largement continue telle que $|\mu| \leq |\nu_A|$ et $\bar{\mu}_A = 0$ sur Y . La construction du cas précédent s'applique à A' et en fournit une partition $\mathcal{E}_{A'}$. On pose alors $\mathcal{E}_A = \{A'', \partial_Y^0 A\} \cup \mathcal{E}_{A'}$.

Ceci termine la dernière étape de la démonstration du théorème 1.3.8.

1.3.3 Étape 3 : Fin de la préparation

Maintenant que les étapes précédentes ont permis de mettre en place tous les outils nécessaires, reprenons à son début le fil de notre récurrence. En supposant \mathbf{T}_m vérifiée, on veut démontrer \mathbf{T}_{m+1} pour une famille de fonctions semi-algébriques $(\theta_i : A_i \subseteq K^{m+1} \rightarrow K)_{i \in I}$ et des entiers $n, N \geq 1$ fixés. Comme indiqué avant l'étape 1, on se ramène facilement au cas de fonctions θ_i définies sur R^{m+1} .

L'étape 1 donne des entiers $e_0, N_0, M_0 \geq 1$, une déformation u_η de R^{m+1} et une famille \mathcal{A} de cellules modulo Q_{N_0, M_0}^\times ajustées et largement continues, tels que

- $e_0 N$ divise N_0 et $M_0 > 2\nu(e_0)$;
- \mathcal{A} est une partition de R^{m+1} ;
- pour chaque $i \in I$ et $A \in \mathcal{A}$, et pour tout $(x, t) \in A$:

$$\theta_i \circ u_\eta(x, t) = \mathcal{U}_{e_0, n}(x, t) \cdot h_{i, A}(x) \left[\lambda_A^{-1}(t - c_A(x)) \right]^{\frac{\alpha_{i, A}}{e_0}}. \quad (1.9)$$

L'étape 2 fournit alors, pour $n_1, N_1 \geq 1$ quelconques, des entiers $e_1 \geq 1$ et $M_1 > 2\nu(e_1)$ arbitrairement grands, un complexe simplicial \mathcal{T} d'indice M_1 , un homéomorphisme semi-algébrique $\psi : \bigcup \mathcal{T} \rightarrow R^m$ et un \triangleleft^n -raffinement \mathcal{B} de \mathcal{A} tels que

- \mathcal{B} est un monoplexe cellulaire modulo Q_{N_1, M_1}^\times ;
- $\psi(\mathcal{T}) = \widehat{\mathcal{B}}$;
- $f \circ \psi|_T$ est N_1 -monomiale modulo U_{e_1, n_1} pour tout $T \in \mathcal{T}$ et toute fonction f définie sur $\psi(T)$ prise parmi : les $h_{i, A}$ de (1.9); les centres et bornes de cellules de \mathcal{B} ; les éléments d'un système complet de \triangleleft^n -transitions de $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Comme indiqué dans la remarque 1.3.6, le fait que $\mathcal{B} \triangleleft^n \mathcal{A}$ permet de conserver sur chaque $B \in \mathcal{B}$ une factorisation des $\theta_i \circ u_\eta$ semblable à (1.9) :

$$\theta_i \circ u_\eta(x, t) = \mathcal{U}_{e_0, n}(x, t) \cdot h_{i, B}(x) [\lambda_B^{-1}(t - c_B(x))]^{\frac{\alpha_{i, B}}{e_0}} \quad (1.10)$$

De plus les nouvelles fonctions $h_{i, B}$ sont des produits des fonctions $h_{i, A}$ de (1.9) et des fonctions de transitions $h_{B, A}$ (pour $A \in \mathcal{A}$ contenant B). Par conséquent chaque $h_{i, B} \circ \psi$ est encore N_1 -monomiale modulo U_{e_1, n_1} sur $\psi^{-1}(\widehat{B})$.

Cette étape 2 peut s'appliquer avec $n_1 = \max(1 + 2\nu(e_0), n + \nu(e_0))$ et $N_1 = N_0$. En outre, puisque M_1 peut être pris arbitrairement grands, nous sommes en droit d'exiger que

- $M_1 > \nu(N_0) (\geq \nu(e_0))$ puisque e_0 divise N_0 , et;
- $M_1 \geq M_0 - \nu(N_0)$.

Comme $N_1 = N_0$ et $M_1 + \nu(N_0) \geq M_0$, $Q_{N_0, M_1 + \nu(N_0)}^\times$ est un sous-groupe de $Q_{N_0, M_1}^\times = Q_{N_1, M_1}^\times$. Il est d'indice fini, donc chaque cellule $B \in \mathcal{B}$ admet une partition finie en cellules C modulo $Q_{N_0, M_1 + \nu(N_0)}^\times$, ayant les mêmes centres et bornes que B . En particulier $\mathcal{C} \triangleleft^n \mathcal{A}$, avec le même système complet de \triangleleft^n -transitions pour $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ que pour $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. En outre $Q_{N_0, M_1 + \nu(N_0)}^\times$ est ouvert-fermé dans Q_{N_0, M_1}^\times , il est donc facile de voir que l'ensemble \mathcal{C} de ces cellules est encore un monoplexe cellulaire.

Nous avons donc : (a) $\mathcal{C} \triangleleft^n \mathcal{B}$, et; (b) (\mathcal{T}, φ) est une N_0 -monomialisation modulo U_{e_1, n_1} des fonctions $h_{i, B}$ et des fonctions de transition de $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Le même argument qui nous a permis de passer de (1.9) à (1.10) s'applique donc à nouveau, et permet de déduire de (1.10) les fonctions $\theta_i \circ u_\eta$ se factorisent sur chaque cellule $C \in \mathcal{C}$ sous la même forme

$$\theta_i \circ u_\eta(x, t) = \mathcal{U}_{e_0, n}(x, t) \cdot h_{i, C}(x) [\lambda_C^{-1}(t - c_C(x))]^{\frac{\alpha_{i, A}}{e_0}} \quad (1.11)$$

où les $h_{i, C} \circ \psi$ sont N_0 -monomiales modulo U_{e_1, n_1} sur $\psi^{-1}(\widehat{C})$.

À ce stade la préparation des fonctions θ_i est terminée. La suite de la preuve consiste à construire : un complexe simplicial \mathcal{S} d'indice M_1 ; une projection semi-algébrique $\Phi : \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow \bigsqcup \mathcal{T}$; et un isomorphisme $\varphi : \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow R^{m+1}$; tels que le diagramme suivant soit commutatif et que chaque $\theta_i \circ u_\eta \circ \varphi|_S$ soit N -monomiale modulo $U_{e_0 e_1, n}$ sur chaque $S \in \mathcal{S}$. En particulier $(\mathcal{S}, u_\eta \circ \varphi)$ sera alors une N -monomialisation de θ_i de paramètres $(n, N, e_0 e_1, M_1)$ ce qui terminera la preuve de \mathbf{T}_{m+1} .

$$\begin{array}{ccc} R^{m+1} & \xleftarrow{\varphi} & \bigsqcup \mathcal{S} \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ R^m & \xleftarrow{\psi} & \bigsqcup \mathcal{T} \end{array} \quad (1.12)$$

Pour donner une idée de cette construction, voyons tout d'abord comment construire à partir d'une unique cellule $C = (c, \nu, \mu, \lambda)$ de \mathcal{C} :

- un simplexe $S_C \subseteq D^{M_1} R^q$;
- un isomorphisme semi-algébrique $\varphi_C : S_C \rightarrow C$;
- une projection semi-algébrique Φ_C de S_C sur $U_C = \psi^{-1}(\widehat{C})$;

de sorte que le diagramme suivant soit commutatif et que chaque $\theta_i \circ u_\eta \circ \varphi_C$ soit N -monomiale modulo $U_{e_0 e_1, n}$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{\varphi_C} & S_C \\ \downarrow & & \downarrow \Phi_C \\ \widehat{C} & \xleftarrow{\psi|_C} & U_C \end{array} \quad (1.13)$$

Le cas où C est de type 0 est trivial : il suffit de prendre $S_C = U_C$ et $\varphi_C = c \circ \psi$ (rappelons que par construction $U_C \in \mathcal{T}$ est un simplexe de $D^{M_1} R^q$). On peut donc supposer que $C = (C, \nu, \mu, \lambda)$ est de type 1, et donc $\lambda \neq 0$. La cellule sous-jacente est l'ensemble des $(x, t) \in X \times K$ tels que

$$|\nu(x)| \leq |t - c(x)| \leq |\mu(x)| \quad \text{et} \quad t - c(x) \in \lambda Q_{N_0, M_1 + \nu(N_0)}^\times$$

où $X = \psi(U_C)$ est le socle de C . Comme $\lambda \neq 0$ et $v(Q_{N_0, M_1 + v(N_0)}^\times) = N_0 \mathcal{Z}$ on peut s'arranger pour que $0 \leq v(\lambda) < N_0$.

Par construction $M_1 > v(N_0)$, donc la fonction $y \mapsto y^{N_0}$ induit un homéomorphisme de Q_{1, M_1}^\times sur $Q_{N_0, M_1 + v(N_0)}^\times$ d'après le lemme 1.1.3. Il s'ensuit qu'un couple $(x, t) \in X \times K$ appartient à C si et seulement si $x = \varphi(u)$ avec $u \in U_C$ et si $t = c(x) + \lambda y^{N_0}$ avec $y \in Q_{1, M_1}^\times$ tel que

$$\left| \frac{v(x)}{\lambda} \right|^{\frac{1}{N_0}} \leq |y| \leq \left| \frac{\mu(x)}{\lambda} \right|^{\frac{1}{N_0}}.$$

Il ne reste donc qu'à vérifier que ces conditions sur (u, y) définissent un simplexe p -adique d'indice M_1 . C'est l'objet de la proposition suivante.

Par construction U_C est un simplexe de $D^{M_1} R^q$ pour un certain $q \geq 0$. C'est donc la pré-image par la valuation d'un simplexe vU_C de Γ^q . Notons I_C le support de vU_C (et de U_C). On sait que $\mu \circ \psi|_C$ et $v \circ \psi|_C$ sont N_0 -monomiales modulo U_{e_1, n_1} . Il existe donc des coefficients $\xi \in K^\times$ et $\beta_i \in \mathbb{Z}$ pour $i \in I_C$ tels que pour tout $u \in U_C$

$$\mu \circ \psi(u) = \mathcal{U}_{e_1, n_1}(u) \cdot \xi \cdot \prod_{i \in I_C} u_i^{N_0 \beta_i}. \quad (1.14)$$

Comme A est une cellule ajustée $v(\mu_C(x)) \in v(\lambda) + N_0 \mathcal{Z}$ pour tout $x \in \hat{A}$, donc $v(\xi)$ est congru à $v(\lambda)$ modulo N_0 d'après l'égalité ci-dessus. Soit donc $\beta_0 \in \mathcal{Z}$ tel que $v(\xi) = v(\lambda) + N_0 \beta_0$, et pour tout $u \in U_C$ posons

$$\mu'(u) = M_1 + v(N_0) + \beta_0 + \sum_{i \in I_C} \beta_i u_i.$$

On définit de même v' à partir de v (si $v = 0$ on pose $v' = +\infty$), et on introduit l'ensemble vS_C suivant.

$$vS_C = \{a \in F_{I_C \cup \{q+1\}}(\Gamma^{q+1}) \mid \hat{a} \in vU_C \text{ et } \mu'(\hat{a}) \leq a_m \leq v'(\hat{a})\}$$

Proposition 1.3.10. *Avec les notations ci-dessus vS_C est un simplexe discret. Sa pré-image S_C par la valuation, restreinte à $D^{M_1} R^{q+1}$, est donc un simplexe p -adique, dont le socle est bien sûr U_C . En outre l'application*

$$\varphi_C(a) = (\psi(\hat{a}), c(\psi(\hat{a})) + \pi^{-N_0(M_1 + v(N_0))} \lambda a_{q+1}^{N_0})$$

définit un homéomorphisme de S_C sur C , largement continu, dont le prolongement à $\overline{S_C}$ envoie bijectivement les faces de S_C sur les pseudo-faces de C (les cellules de \mathcal{C} incluses dans \overline{C}).

Esquisse de démonstration. Examinons tout d'abord les propriétés de μ' . C'est par définition une application Ω -affine. De plus, par (1.14), pour tout $u \in U_C$

$$(\mu \circ \psi(u)) = v(\xi) + \sum_{i \in I_C} N_0 \beta_i v(u_i) = v(\lambda) + N_0 [\mu'(v(u)) - (M_1 + v(N_0))].$$

On en déduit

$$\mu'(v(u)) = M_1 + v(N_0) + \frac{v(\mu \circ \psi(u)) - v(\lambda)}{N_0}. \quad (1.15)$$

En particulier l'application μ' est déterminée par μ de manière unique, même si les coefficients β_i donnés plus haut ne le sont pas. Comme μ est largement continue, il s'en suit facilement que μ' l'est aussi. Les mêmes arguments s'appliquent à v' , qui est donc aussi largement continue.

De plus, comme C est une cellule ajustée modulo $Q_{N_0, M_1 + v(N_0)}^\times$ et qu'elle est contenue dans R^{m+1} , il n'est pas difficile de voir²¹ que $v(\mu(x)) \geq -(M_1 + v(N_0))$. D'autre part $v(\lambda) \leq N_0 - 1$ par construction donc (1.15) donne

$$\mu'(v(u)) \geq M_1 + v(N_0) + \frac{-(M_1 + v(N_0)) - (N_0 - 1)}{N_0}.$$

21. On pourrait s'attendre à ce que $v(\mu_A(x)) \geq 0$, mais $A = (-\pi^{-M}, \pi^{-M}, \pi^{-M}, Q_{N, M}^\times)$ donne un exemple de cellule modulo $Q_{N, M}^\times$ incluse dans R (en fait $A \simeq R$) telle que $v(\mu_A) = -M$.

Autrement dit, en posant $M' = M_1 + v(N_0)$ pour simplifier,

$$\mu'(v(u)) \geq \frac{M'N_0 - M' - N_0 + 1}{N_0} = \frac{(M' - 1)(N_0 - 1)}{N_0} \geq 0.$$

La fonction μ' est donc positive, ce qui achève de montrer que vS_C est un polytope discret (et explique au passage la raison d'être du terme $M_1 + v(N_0)$ dans la définition de μ').

Le fait que φ_C soit injective sur S_C découle de l'injectivité de ψ_C sur U_C et de $y \mapsto y_0^N$ sur Q_{1,M_1}^\times . Pour tout $a \in S_C$ posons $u = \hat{a} \in U_C$ et $y = \pi^{-(M_1+v(N_0))} a_{q+1}$. Alors $\varphi_C(a) = (x, t)$ avec $x = \psi_C(x)$ et $t = c(x) + \lambda y^{N_0}$, et il est facile de vérifier que

$$\mu'(\hat{a}) \leq a_{q+1} \leq v'(\hat{a}) \iff \left| \frac{v(x)}{\lambda} \right|^{\frac{1}{N_0}} \leq |y| \leq \left| \frac{\mu(x)}{\lambda} \right|^{\frac{1}{N_0}}.$$

En outre a_{q+1} et $\pi^{-(M_1+v(N_0))}$ appartiennent à Q_{1,M_1}^\times , donc $y \in Q_{1,M_1}^\times$, et donc enfin

$$t - c(x) = \lambda y^{N_0} \in \lambda Q_{N_0, M_1+v(N_0)}^\times$$

ce qui montre que $\varphi(S_C) = C$.

Les faces de S_C sont obtenues à partir de (μ', v') par passage aux limites (c'est la proposition 1.2.6 de présentation des faces). De même les pseudo-faces de C relativement à \mathcal{C} sont obtenues à partir de (c, v, μ) par passage aux limites (c'est la remarque 1.3.7). Comme ψ envoie les faces de U_C sur les $Y \in \widehat{\mathcal{A}}$ inclus dans l'adhérence de \widehat{A} , il est facile d'en déduire que φ_C se prolonge en un homéomorphisme de $\overline{S_C}$ sur \overline{C} qui envoie les faces de S_C sur les pseudo-faces de C . Or les faces de C forment une chaîne pour l'ordre de spécialisation, puisque \mathcal{C} est un monoïde. Il en va donc de même des faces de S_C , ce qui montre que S_C est bien un simplexe p -adique. \square

1.3.4 Étape 4 : Fin de la récurrence

À ce stade on a réalisé toutes les conditions du diagramme 1.13 pour la cellule C : il suffit de prendre l'application φ_C de la proposition 1.3.10 et la projection naturelle $\Phi_C(a) = \hat{a}$. Pour passer au diagramme 1.12 il ne reste qu'à les « recoller » convenablement. Une dernière difficulté surgit alors : si par exemple $C, D \in \mathcal{C}$ sont deux cellules de type 1 ayant le même socle X , le même centre et les mêmes pseudo-faces strictes, les simplexes S_C et S_D construits ci-dessus vivent dans le même espace $F_{I \cup \{q+1\}}(D^{M_1} R^{q+1})$, où $I \subseteq \llbracket 1, q \rrbracket$ est le support de $U_C = U_D$. Comme ils ont les mêmes faces strictes, ils vont s'intersecter ! Il est facile d'y remédier en adaptant leurs définitions, de façon à placer par exemple l'un dans $F_{I \cup \{q+1\}}(D^{M_1} R^{q+2})$ et l'autre dans $F_{I \cup \{q+2\}}(D^{M_1} R^{q+2})$, la différence des supports suffisant à séparer totalement S_C de S_D sans toucher à leurs faces communes. Mais il faut le faire uniformément sur l'ensemble des cellules de \mathcal{C} , pour assurer une compatibilité totale lors du recollement de l'ensemble des simplexes ainsi construits le long de toutes leurs faces communes.

Pour cela on construit au préalable un arbre \mathcal{H} de parties de \mathbb{N}^* , dont les éléments seront les supports des simplexes S_C (voir plus loin). On souhaite que cet arbre soit isomorphe à \mathcal{C} , et on construit en même temps une projection de \mathcal{H} sur \mathcal{U} rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{\mathcal{C}} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{T} \end{array} \quad (1.16)$$

Dans ce diagramme, la flèche verticale gauche est la projection $C \mapsto \widehat{C}$ et la flèche horizontale inférieure est $T \mapsto \psi(T)$. Pour construire les deux autres flèches et l'arbre \mathcal{H} , on introduit d'abord deux fonctions H, P de \mathcal{C} dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ des parties de \mathbb{N}^* ayant les propriétés suivantes. Tout d'abord H est strictement croissante, et pour toutes cellules $A, B, C \in \mathcal{C}$ telles que $B \leq A$:

- Si A est de type 0, $H(A) = P(A)$.
- Si A est de type 1, $H(A) = P(A) \cup \{r_A\}$ pour un certain $r_A > \max P(A)$.
- $P(A)$ et le support I_A de $U_A (= \psi^{-1}(\hat{A}))$ ont le même cardinal.
- $P(B) = H(B) \cap P(A)$ (en particulier P est croissante et $P(B) \subseteq H(B)$).
- Si σ_A désigne l'unique bijection croissante de I_A dans $P(A)$, alors σ_A envoie aussi I_B sur $P(B)$ (autrement dit la restriction de σ_A à I_B est σ_B).
- Si $P(C) \subseteq P(A)$ alors $U_C \subseteq U_A$.

En posant $\mathcal{H} = \{H(A)\}_{A \in \mathcal{C}}$ et $\mathcal{P} = \{P(A)\}_{A \in \mathcal{C}}$, tous deux ordonnés par inclusion, on obtient un isomorphisme $H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$ et une projection $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$. De plus l'application $P(A) \mapsto U_A$ pour $A \in \mathcal{A}$, est bien définie, et réalise un isomorphisme de \mathcal{P} sur \mathcal{T} . On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{\mathcal{C}} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{T} \xleftarrow{\sim} \mathcal{P}
 \end{array} \tag{1.17}$$

dont H^{-1} et $P \circ H^{-1}$ sont respectivement la flèche horizontale supérieure et la flèche diagonale. Le diagramme 1.16 s'en déduit immédiatement.

Pour chaque cellule $C = (c, \nu, \mu, \lambda) \in \mathcal{C}$, on reconstruit alors comme suit toutes les données de la proposition 1.3.10, en prenant soin cette fois de placer S_C dans une « case » de support $H(C)$. Posons²² $r_C = \max H(C) \cup \{1\}$, et $r = \max_{A \in \mathcal{C}} r_A$. Rappelons que $U_C = \psi^{-1}(\hat{C})$ est un simplexe de $D^{M_1} R^q$ de support I_C .

- $\Phi_C: F_{H(C)}(D^{M_1} R^r) \rightarrow F_{I_C}(D^{M_1} R^q)$ est définie par $\Phi_C(a) = u$ avec $u_i = a_{\sigma_C(i)}$ si $i \in I_C$, et $u_i = 0$ sinon. Comme $\sigma_C: I_C \rightarrow P(C)$ est une bijection croissante, que $H(C) = P(C)$ si C est de type 0, et que $H(C) = P(C) \cup \{r_C\}$ si C est de type 1, on voit que $\Phi_C(a)$ reprend toutes les coordonnées non nulles de a dans le même ordre, sauf la dernière si C est de type 1. Dans ce dernier cas on peut voir Φ_C comme un redéploiement dans un espace plus grand, de la projection naturelle de $D^{M_1} R^{q+1}$ sur $D^{M_1} R^q$.
- Si C est de type 0, S_C est l'ensemble des $a \in F_{H(C)}(D^{M_1} R^r) = F_{P(C)}(D^{M_1} R^r)$ tels que $\Phi_C(a) \in U_C$. En particulier Φ_C induit dans ce cas un homéomorphisme de S_C sur U_C , largement continu et préservant toutes les faces.
- Si C est de type 1,

$$S_C = \left\{ a \in F_{H(C)}(D^{M_1} R^r) \mid \Phi_C(a) \in U_C \text{ et } \mu'(v(\Phi_C(a))) \leq v(a_{r_C}) \leq v'(v(\Phi_C(a))) \right\}$$

où μ' et v' sont définies comme dans la proposition 1.3.10.

- Enfin pour tout $a \in S_C$,

$$\varphi_C(a) = \left(\psi \circ \Phi_C(a), c(\psi \circ \Phi_C(a)) + \pi^{-N_0(M_1 + v(N_0))} \lambda a_{r_C}^{N_0} \right). \tag{1.18}$$

On conserve ici l'hypothèse faite plus haut que $0 \leq v(\lambda) < N_0$.

Avec les mêmes arguments que dans la proposition 1.3.10 on montre que S_C est un simplexe de $D^{M_1} R^r$ et $\varphi_C: S_C \rightarrow C$ un homéomorphisme largement continu, envoyant les faces de S_C sur les pseudo-faces de C . En outre les « cases » $F_{H(C)}(D^{M_1} R^r)$ sont ainsi disposées que pour toute pseudo-face D de C , S_D est une face de S_C , et φ_D n'est autre que la restriction de $\bar{\varphi}_C$ à S_D . L'ensemble de ces simplexes S_D forme donc un complexe simplicial \mathcal{S} , et les différentes applications φ_C se recollent en un homéomorphisme $\varphi: \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow \bigsqcup \mathcal{C} = R^{m+1}$. De même les différentes projections Φ_C restreintes à S_C se recollent en une projection $\Phi: \bigsqcup \mathcal{S} \rightarrow \bigsqcup \mathcal{T}$ qui rend le diagramme 1.12 commutatif. En particulier le couple (\mathcal{S}, φ) réalise donc une triangulation de \mathcal{C} .

22. En général, $H(C)$ est une partie non vide \mathbb{N}^* et $r_C = \max H(C)$. Toutefois $H(C)$ peut être vide si C est un point. La définition de r_C comme $\max H(C) \cup \{1\}$ plutôt que comme $\max H(C)$ permet d'éviter ce (faux) problème.

Il reste à se convaincre que $(\mathcal{S}, u_\eta \circ \varphi)$ est aussi une monomialisation des θ_i , de paramètres $(n, N, e_0 e_1, M_1)$. Ceci découle avant tout de (1.9), et de la commutativité du diagramme 1.12. En effet sur chaque cellule $C = (c, \nu, \mu, \lambda) \in \mathcal{C}$, (1.9) donne

$$\theta_i \circ u_\eta \circ \varphi_C = \mathcal{U}_{e_0, n} \cdot h_{i, C} \circ \varphi_C \cdot [\lambda^{-1} \delta_C \circ \varphi_C]^{\frac{a_{i, C}}{e_0}}$$

où $\delta_C(x, t) = t - c(x)$ pour tout $(x, t) \in C$. Par construction $h_{i, C} \circ \varphi_C$ est N_0 -monomiale modulo U_{e_1, n_1} . Comme en outre N divise N_0 et $n_1 \geq n$, il s'ensuit facilement que $\mathcal{U}_{e_0, n} \cdot h_{i, C} \circ \varphi_C$ est N -monomiale modulo $U_{e_0 e_1, n}$.

Il ne reste donc qu'à vérifier que $[\lambda^{-1} \delta_C \circ \varphi_C]^{1/e_0}$ l'est aussi. C'est immédiat si C est de type 0, car alors $\delta_C = 1$. Sinon, $\lambda \neq 0$ et pour tout $a \in S_C$ nous avons d'après (1.18)

$$\lambda^{-1} \delta_C \circ \varphi_C(a) = \pi^{-N_0(M_1 + \nu(N_0))} a_{r_C}^{N_0}$$

Comme N_0 est multiple de $e_0 N$, $[\lambda^{-1} \delta_C \circ \varphi_C]^{1/e_0}$ est donc N -monomiale, et *a fortiori* N -monomiale modulo $U_{e_0 e_1, n}$.

1.3.5 Applications

K désigne toujours un corps p -adiquement clos fixé, R son anneau de valuation et \mathcal{Z} son groupe de valeurs.

On sait depuis [Cluckers, 2001] que deux ensembles semi-algébriques sur K , infinis, sont en bijection semi-algébrique si et seulement s'ils ont la même dimension. Plus généralement les résultats de [Cluckers, 2003] montrent qu'il ne saurait exister d'invariant jouant dans le domaine p -adique un rôle analogue à celui de la caractéristique d'Euler-Poincaré dans le domaine réel. Aucune application de la triangulation p -adique n'est donc à attendre dans cette direction. On peut toutefois se demander ce qu'elle apporte à la classification des ensembles semi-algébriques à homéomorphismes semi-algébriques près. Pas grand chose pour l'instant, car la classification des simplexes p -adiques à homéomorphismes semi-algébriques près est elle-même encore à faire. Mais elle nous renseigne déjà sur le nombre de classes d'homéomorphismes.

Théorème 1.3.11. *Le nombre de classes d'ensembles semi-algébriques sur K à isomorphismes semi-algébriques près est au plus égal au cardinal de \mathcal{Z} .*

Démonstration. Les complexes simpliciaux sont définis comme pré-images des simplexes discrets par la valuations. Il y a donc autant de complexes simpliciaux p -adiques que discrets, et leur nombre est bien sûr égal au cardinal de \mathcal{Z} . Or la triangulation p -adique ramène les ensembles semi-algébriques sur K à des complexes simpliciaux. \square

Dans le même ordre d'idée on sait que le nombre de « trous » d'une surface réelle est un invariant topologique essentiel, qui disparaît dans le cas p -adique. En effet tout ensemble semi-algébrique $X \subseteq K^m$ non vide peut être dit « semi-algébriquement contractile », au sens où il existe une fonction semi-algébrique continue $H : X \times R \rightarrow X$ et un point $a \in X$ tels que $H(x, 1) = x$ et $H(x, 0) = a$. Cette définition est calquée sur celle de la géométrie réelle, en remplaçant l'intervalle $[0, 1]$ par la boule unité de K , autrement dit R . Or elle peut toujours être vérifiée, en prenant pour a un point quelconque de X et en posant $H(x, t) = x$ si t est inversible, et $H(x, t) = a$ sinon.

Rappelons qu'une rétraction d'un espace topologique X sur une partie Y est une application continue $\sigma : X \rightarrow Y$ dont la restriction à Y est l'identité. Si X est séparé (Hausdorff) l'existence d'une telle rétraction nécessite que Y soit fermé dans X . La présence de trous, détectés par homotopie, dans un ensemble semi-algébrique réel X peut faire obstruction à l'existence de rétractions. Dans le cas p -adique, l'absence de trous au sens ci-dessus fait tomber cette obstruction, mais ne montre pas pour autant que des rétractions existent effectivement. C'est là que la triangulation p -adique intervient.

Théorème 1.3.12 (Rétraction). *Soient $Y \subseteq X \subseteq K^m$ des ensembles semi-algébriques non vides. Si Y est fermé dans X , il existe une rétraction semi-algébrique $\sigma : X \rightarrow Y$.*

Esquisse de démonstration. La triangulation p -adique ramène essentiellement au cas d'un simplexe X et d'une face propre $Y = F_I(X)$. On prend alors $\sigma = \pi_I$ (voir le point 1 de la proposition 1.2.3). \square

Remarque 1.3.13. Par d'autres méthodes, un résultat très voisin a été obtenu indépendamment dans [Cluckers et Martin, 2018], aussi bien pour les ensembles semi-algébriques que pour les sous-analytiques. Toutefois celui-ci ne donne l'existence que d'une rétraction définissable de K^m sur \overline{Y} . Par restriction cela fournit une rétraction de X sur Y , si X est fermé dans K^m . J'ignore à ce jour si cette dernière condition peut être éliminée de [Cluckers et Martin, 2018] pour retrouver exactement le théorème 1.3.12.

Le résultat suivant peut sembler plus trivial, si l'on en juge à partir de son analogue réel (qui ne nécessite aucunement la triangulation). Mais le cas p -adique est nettement plus compliqué, car considérer $|f|$ fait perdre beaucoup plus d'informations sur f que dans le cas réel.

Théorème 1.3.14 (Relèvement). *Si une fonction $f : X \subseteq K^m \rightarrow K$ est semi-algébrique et si $|f|$ est continue, il existe une application $h : X \rightarrow K$ semi-algébrique et continue telle que $|f| = |h|$.*

L'application qui suit est beaucoup plus surprenante, dans la mesure où elle ne ressemble à rien de connu dans le cas réel. En effet les X_i donnés par la conclusion sont ouverts-fermés dans X , non vides et deux à deux disjoints. On peut donc voir la propriété énoncée par ce théorème de découpage comme une forme particulièrement poussée de non connexité. Comme il a été dit dans l'introduction, c'est l'étude de la théorie des modèles des treillis échelonnés et des algèbres co-Heyting entamée dans [Darnière, 2004] (et présentée dans la seconde partie de ce mémoire) qui m'a conduit à conjecturer cette propriété que, semble-t-il, personne n'avait soupçonnée jusque là. En outre elle joue aussi un rôle décisif dans l'étape de récurrence de la démonstration du théorème de triangulation p -adique (voir notamment la section 1.3.2).

Théorème 1.3.15 (Découpage). *Soit $X \subseteq K^m$ un ensemble semi-algébrique non vide, relativement ouvert, sans point isolé. Soient Y_1, \dots, Y_s des fermés semi-algébriques tels que $Y_1 \cup \dots \cup Y_s = \partial X$. Il existe une partition de X en morceaux semi-algébriques X_1, \dots, X_s non vides, telle que $\partial X_k = Y_k$ pour chaque $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$.*

Esquisse de démonstration. La triangulation ramène essentiellement au cas où X est un simplexe p -adique dans $D^M R^q$, et les Y_i des unions de faces strictes de X . Soit Y la facette de X . L'un au moins des Y_k contiennent Y . Pour faire simple, supposons qu'ils contiennent tous Y , donc que chaque $Y_k = \partial X = \overline{Y}$. Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ un élément du support de X qui n'appartienne pas au support de Y . Il suffit de poser, pour $1 \leq k \leq s$

$$Y_k = \{x \in X \mid v(x_i) \equiv i \pmod{s}\}.$$

\square

Corollaire 1.3.16. *(Continuité large par morceaux) Soit $f : X \subseteq K^m \rightarrow K$ une fonction semi-algébrique dont le graphe est borné. Si en tout point de \overline{X} , f n'a qu'un nombre fini de valeurs limites²³ alors il existe une partition de X en morceaux X_1, \dots, X_s sur chacun desquels la restriction de f est largement continue.*

Esquisse de démonstration. Les fonctions semi-algébriques sont continues par morceaux, ce qui ramène au cas où f est continue sur X . Les fibres de la projection sur \overline{X} de l'adhérence du graphe de f étant toutes finies par hypothèse, leur cardinal est borné par un certain nombre s (c'est une conséquence de la décomposition cellulaire). Par le théorème de découpage, on se ramène ainsi au cas où

23. Autrement dit, la projection sur K^m de l'adhérence du graphe de f n'a que des fibres finies.

f a exactement s valeurs limites en chaque point $y \in \partial X$, chacune donnée par une fonction $l_k(y)$ de ∂X dans K . À l'aide d'une rétraction $\sigma : X \rightarrow \partial X$ on peut alors découper X en parties semi-algébriques non vides X_1, \dots, X_s , chaque X_k étant formée des points $x \in X$ pour lesquels $f(x)$ est plus proche de $l_k(\sigma(x))$ que de tous les autres $l_j(\sigma(x))$, et montrer que f est largement continue sur chaque X_k . \square

Notons que, contrairement au théorème 1.3.15, la propriété énoncée par le corollaire 1.3.16 est aussi valable si K est un corps réel-clos. En effet, par triangulation on se ramène alors au cas où X est un simplexe S sur lequel f est continue, et dans ce cas on peut même conclure que f est largement continue sur S . En effet tout point b de ∂S admet une base \mathcal{U} de voisinages dont les intersections avec S sont définissablement connexes. Aussi petit que soit un tel voisinage $U \in \mathcal{U}$ de b , l'image de $U \cap S$ par f est donc (par continuité de f sur S) une partie définissablement connexe de K , autrement dit un intervalle. L'intersection des adhérences des $f(U \cap S)$, quand U décrit \mathcal{U} , est donc un intervalle fermé I_b . Or cette intersection est formée par construction de l'ensemble S_b de toutes les valeurs d'adhérences de f en b . Comme cet ensemble est fini par hypothèse, l'intervalle $I_b = S_b$ est réduit à un point, et f admet donc en b un prolongement par continuité.

Dans le cas p -adique en revanche, une fonction peut parfaitement être continue sur un simplexe p -adique et posséder plusieurs valeurs limites distinctes en chaque point de sa frontière : il suffit de considérer sur $S = D^1 \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ la fonction $f(x) = (-1)^{v(x)}$. Le corollaire 1.3.16 apparaît ici comme optimal, même sur un simplexe.

1.4 P-minimalité versus p -optimalité

Le théorème 1.1.4 de décomposition cellulaire et de préparation des fonctions semi-algébriques de Denef a été étendu dans [Cluckers, 2004] aux ensembles et fonctions sous-analytiques. Ces deux structures, semi-algébrique et sous-analytique, sont les exemples les plus importants connus à ce jour de structure **P-minimale** (que j'appellerai aussi **fortement p -minimale**). On nomme ainsi les structures $\mathcal{K} = (K, \dots)$ enrichissant un corps p -adiquement clos K , telle que pour toute structure élémentairement équivalente $\mathcal{K}^* = (K^*, \dots)$ les seules parties définissables de K^* soient les parties semi-algébriques. Si cette condition est vérifiée simplement par \mathcal{K} (quoiqu'il en soit des structures élémentairement équivalentes) je dirais que \mathcal{K} est **p -minimale**.

La définition de la p -minimalité est calquée sur celle de la o-minimalité, en remplaçant « réel clos » par « p -adiquement clos ». Toutefois, contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, la présence de fonctions de Skolem définissables n'est pas automatique dans une structure p -minimale, ce qui ne permet pas d'en déduire la P-minimalité. Pire encore, même pour les corps P-minimaux l'existence de fonctions de Skolem n'est pas garantie, comme il a été démontré dans [Cubides Kovacsics et Nguyen, 2017]. Or on sait par [Mourgues, 2000] que l'existence de telles fonctions est équivalente, pour un corps P-adiquement clos, à celle d'une décomposition cellulaire semblable à celle de Denef. On ne peut donc pas espérer généraliser cette décomposition cellulaire, ni *a fortiori* la triangulation p -adique, à tous les corps P-minimaux. La notion un peu plus forte de structure « p -optimale » (voir plus loin) apporte une solution à ce problème.

Néanmoins les ensembles définissables sur les corps P-minimaux possèdent nombre de propriétés remarquables, et en particulier une belle théorie de la dimension, qui montre que leur topologie est modérée (« tame »). Rappelons que pour toute partie I de $\llbracket 1, m \rrbracket$ à r éléments $i_1 < \dots < i_r$ on note $\pi_I : K^m \rightarrow K^r$ la projection définie par

$$\pi_I : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_r}).$$

Par exemple π_\emptyset projette K^m sur l'unique point de $K^0 = \{\emptyset\}$. Pour toute partie non vide $S \subseteq K^m$, la **dimension** de S est alors le nombre

$$\dim S = \max \{ \text{Card}(I) \mid \pi_I(S) \text{ est d'intérieur non vide dans } K^r \}.$$

On a donc $\dim S \geq 0$ pour toute partie non vide, et on convient que $\dim \emptyset = -\infty$. [Haskell et Macpherson, 1997] démontrent parmi beaucoup d'autres choses les résultats suivants.

(HM₁) $\dim A_1 \cup \dots \cup A_r = \max(\dim A_1, \dots, \dim A_r)$, pour tous $A_1, \dots, A_r \subseteq K^m$ définissables.

(HM₂) $\dim X \setminus \mathcal{C}(f) < m$, pour toute fonction définissable f de $X \subseteq K^m$ dans K (resp. dans $|K|$), où $\mathcal{C}(f)$ désigne l'ensemble des points de continuité de f .

Ils laissent néanmoins ouvertes un certain nombre de questions, notamment celle de savoir si $\dim X \setminus \mathcal{C}(f) < \dim X$ pour toute fonction définissable $f : X \subseteq K^m \rightarrow K$, et surtout s'il existe une forme de décomposition cellulaire (éventuellement plus faible que celle de Denef) valable dans tout corps P-minimal. Ce sont ces questions qui sont abordées maintenant.

Remarque 1.4.1. D'autres tentatives de décompositions cellulaires sur les corps P-minimaux, inspirées de celle de Denef mais plus faibles, ont aussi été étudiées indépendamment par d'autres auteurs, en particulier [Cubides-Kovacsics et Leenknegt, 2016].

1.4.1 Corps P-minimaux et décomposition t-cellulaire

Dans cette partie on considère un corps P-minimal $\mathcal{K} = (K, \dots)$ fixé. Les résultats présentés ici ont été obtenus avec Pablo Cubides-Kovacsics et Eva Leenknegt dans [Cubides-Kovacsics *et al.*, 2017]. En s'inspirant de [Mathews, 1995], voire tout simplement de [Bochnak *et al.*, 1998], nous avons appelé **cellule topologique**, en abrégé **t-cellule**, toute partie $C \subseteq K^m$ pour laquelle au moins l'une des projections π_I pour $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$ induit par restriction un homéomorphisme de C sur un ouvert non vide.

Il s'agit bien sûr d'une notion de cellule beaucoup plus faible que celle de Denef : par exemple tout ouvert non vide de K^m est une t-cellule. Une **décomposition t-cellulaire** d'une partie $X \subseteq K^m$ est une partition finie de X en t-cellules. Nous la qualifierons de **bonne** si de plus chaque t-cellule de la décomposition est soit ouverte dans X , soit d'intérieur vide dans X . Le principal résultat de [Cubides-Kovacsics *et al.*, 2017] est que tout ensemble définissable sur K admet une décomposition t-cellulaire, plus précisément :

Théorème 1.4.2. *Soit $f : X \subseteq K^m \rightarrow K^n$ une fonction définissable. Il existe une bonne décomposition t-cellulaire \mathcal{C} de X telle que la restriction de f à chaque cellule C de \mathcal{C} soit continue.*

Pour toute partie $A \subseteq K^m$ définissable, on notera $L(A)$ le treillis des parties définissables de A fermées dans A . Le rang de A pour l'ordre fort (cf. annexe 1) est défini ainsi : $D(A) = -\infty$ si $A = \emptyset$, sinon

$$D(A) = \max \{d \in \mathbb{N} \mid \exists B_0, \dots, B_d \in L(A), \emptyset \neq B_0 \ll \dots \ll B_d\}$$

Du fait que la théorie de \mathcal{K} satisfait le lemme de l'échange [Haskell et Macpherson, 1997, Corollary 6.2], de quelques arguments généraux pris dans [Mathews, 1995, Theorem 8.8] et du théorème 1.4.2 de décomposition t-cellulaire on déduit ce qui suit.

Corollaire 1.4.3. *Pour tout ensemble définissable $A \subseteq K^m$, $\dim A = D(A)$.*

Il est alors facile de montrer le résultat suivant.

Lemme 1.4.4 (du petit bord). *Pour tout ensemble définissable non vide $A \subseteq K^m$, $\dim \overline{A} \setminus A < \dim A$.*

Démonstration. On sait que $\dim \overline{A} = \max(\dim A, \dim \overline{A} \setminus A)$ par (HM₁). Il suffit donc de montrer que $\dim \overline{A} \setminus A < \dim \overline{A}$. Or $\overline{A} \setminus A$ est d'intérieur vide dans \overline{A} , donc $\overline{A} \setminus A \ll \overline{A}$, ce qui entraîne que $D(\overline{A} \setminus A) < D(\overline{A})$, et donc $\dim \overline{A} \setminus A < \dim \overline{A}$ par le corollaire 1.4.3. \square

Le lemme du petit bord, même s'il découle directement de la décomposition t-cellulaire, fournit la clé qui manquait à [Haskell et Macpherson, 1997] pour construire une bonne théorie *locale* de la dimension, que nous présentons maintenant. Étant donné un ensemble définissable $A \subseteq K^m$ et un point $x \in \overline{A}$, la **dimension locale** de A en x est définie²⁴ par

$$\dim(A, x) = \min \{ \dim A \cap B \mid B \text{ boule de } K^m \text{ contenant } x \}.$$

24. Cette définition est empruntée à [Bochnak *et al.*, 1998].

Par convention $\dim(A, x) = -\infty$ si $x \notin \overline{A}$. L'ensemble A est de **pure dimension** d si $\dim(A, a) = d$ en tout point $a \in A$. Enfin on pose

$$C_k(A) = \overline{\{a \in A \mid \dim(A, a) = k\}} \cap A.$$

De (HM₁) et du lemme du petit bord on déduit assez facilement les propriétés suivantes.

Proposition 1.4.5. *Soient $Z \subseteq A \subseteq K^m$ des ensembles définissables et $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $C_k(A) \neq \emptyset$ il est de pure dimension k . C'est la plus grande partie de A de pure dimension k .*
2. *$\dim C_k(A) \setminus \bigcup_{l \neq k} C_l(A) < k$.*
3. *Z est d'intérieur vide dans A si et seulement si $\dim Z \cap C_l(A) < l$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.*

En application, on obtient les deux autres résultats principaux de [Cubides-Kovacsics *et al.*, 2017], dont le second répondait à une question posée dans [Haskell et Macpherson, 1997]. Tous deux illustrent le caractère modéré de la topologie des ensembles et fonctions définissables sur un corps P -minimal.

Théorème 1.4.6. *Soient $A_1, \dots, A_n \subseteq A$ des parties définissables de K^m . Si $A_1 \cup \dots \cup A_n$ est d'intérieur non vide dans A alors au moins l'un des A_i est d'intérieur non vide dans A .*

Démonstration. D'après la proposition 1.4.5, si $Z := A_1 \cup \dots \cup A_n$ est d'intérieur non vide dans A alors $\dim Z \cap C_k(A) = k$ pour au moins un entier k . Mais alors d'après (HM₁), $\dim A_i \cap C_k(A) = k$ pour au moins un indice i , et donc A_i est d'intérieur non vide dans A d'après la proposition 1.4.5. \square

Théorème 1.4.7. *Toute application définissable $f : X \subseteq K^m \rightarrow K^n$ (resp. $|K|^n$) est continue sur une partie définissable U dense et ouverte dans X . En conséquence $\dim X \setminus \mathcal{C}(f) < \dim X$.*

Démonstration. Le théorème 1.4.2 donne une bonne décomposition t -cellulaire \mathcal{C} de X en cellules C sur chacune desquelles la restriction de f est continue. Soit U l'union de toutes les cellules $C \in \mathcal{C}$ ouvertes dans X . La fonction f est continue sur U , et $X \setminus U$ est réunion de t -cellules qui, parce que \mathcal{C} est une *bonne* décomposition, sont chacune d'intérieur vide dans X . D'après le théorème 1.4.6, $X \setminus U$ est donc d'intérieur vide dans X . Autrement dit U est dense dans X , et donc $\dim X \setminus U < \dim X$ par le lemme du petit bord. Le fait que $\dim X \setminus \mathcal{C}(f) < \dim X$ en découle puisque $U \subseteq \mathcal{C}(f)$. \square

1.4.2 Corps p -optimaux, décomposition cellulaire et classification

Les corps p -optimaux introduits dans [Darnière et Halpuczok, 2017] devaient initialement servir de cadre axiomatique à la triangulation p -adique. Cela n'a pas pu se faire (cela se fera peut-être un jour...), mais ils demeurent une bonne alternative à la P -minimalité, s'il s'agit d'inscrire dans un cadre général tous les résultats de géométrie p -adique dont l'histoire est retracée au début de ce mémoire. Par rapport à la P -minimalité, la p -optimalité présente les avantages suivants.

1. Sa définition est *intrinsèque*, c'est-à-dire que (contrairement à la P -minimalité) elle ne fait appel qu'aux propriétés du corps enrichi $\mathcal{K} = (K, \dots)$ considéré, pas aux structures élémentairement équivalentes, tout en restant suffisante pour impliquer la P -minimalité.
2. Elle est assez *naturelle*, comme on le verra plus loin, et suffisamment *générale* pour englober toutes les structures P -minimales usuelles, non pathologiques, en particulier les structures semi-algébriques et sous-analytiques.
3. Enfin elle est *suffisante* pour retrouver tous les résultats usuels de géométrie p -adique, y compris ceux manquants aux structures P -minimales les plus générales : fonctions de Skolem définissables, donc décomposition cellulaire « à la Denef », mais aussi théorème de préparation des fonctions définissables et toutes les conséquences qui s'en suivent, notamment la classification des ensembles définissables à bijection définissable près.

Précisément, un corps p -adiquement clos enrichi $\mathcal{K} = (K, \dots)$ sera dit **quasiment p -optimal**²⁵ si toute partie définissable de K^m est réunion finie de parties **1-basiques** de K^m : celles définies par un nombre fini de conditions de l'un ou l'autre des types suivants

$$f(x) = 0 \qquad f(x) \in P_N^\times$$

où f est une fonction **1-basique**, c'est-à-dire une fonction $f(x_1, \dots, x_m)$ polynomiale en x_m dont les coefficients sont des fonctions définissables de (x_1, \dots, x_{m-1}) définies sur K^{m-1} . Si les fonctions f sont polynomiales en les d dernières variables (avec comme coefficients des fonctions définissables définies sur K^{m-d} tout entier) nous parlerons de fonctions et d'ensembles **d -basiques**²⁶

Le lien avec les ensembles semi-algébriques (voir section 1.1) est assez clair pour que cette notion de quasi p -optimalité puisse être qualifiée de « naturelle ». Elle est en tout cas intrinsèque, et la caractérisation suivante montre qu'elle est à peine plus restrictive que la P -minimalité, et assez générale pour englober exactement le cadre qui nous intéresse.

Théorème 1.4.8. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. \mathcal{K} est quasiment p -optimal.
2. \mathcal{K} est P -minimal et possède des fonctions de Skolem définissables.

Rappelons que, comme l'a montré [Mourgues, 2009], la seconde condition ci-dessus est nécessaire et suffisante pour obtenir l'existence d'une décomposition cellulaire « à la Denef ». Un théorème de préparation des fonctions définissables restait toutefois à démontrer dans ce contexte. Nous y parvenons au prix d'une petite condition supplémentaire :

(Valeurs Extrêmes) Toute fonction définissable et continue, de domaine $X \subseteq K$ fermé et borné, à valeurs dans $|K|$, est bornée et atteint ses bornes.

Un corps **p -optimal** est une structure quasiment p -optimale satisfaisant *en plus* la propriété des valeurs extrêmes. Nous n'avons pas su la déduire de la quasi p -optimalité, mais c'est de toutes façons une hypothèse fort peu contraignante puisqu'elle est automatiquement vérifiée lorsque K est une extension finie de \mathbb{Q}_p , ou plus généralement si la théorie de \mathcal{K} possède un modèle réalisé dans une extension finie de \mathbb{Q}_p .

La preuve du théorème de préparation des fonctions définissables sur un corps p -optimal suit le fil de celle de Denef mais nécessite un ingrédient supplémentaire, donné par le résultat suivant.

Théorème 1.4.9. *Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ un corps P -minimal.*

1. Si \mathcal{K} a la propriété des valeurs extrêmes, alors toute partie définissable de $K \times |K|^d$ est semi-algébrique.
2. Si \mathcal{K} est p -optimal, alors toute partie définissable de $K^m \times |K|^d$ est réunion finie d'ensembles $(d+1)$ -basiques.

[Cluckers, 2003] a montré que si $\mathcal{K} = (K, \dots)$ est P -minimal tous les sous-ensembles définissables de $|K|^d$ sont semi-algébriques. Le théorème 1.4.9 l'étend en une version « relative ».

Les cellules sur un corps p -optimal sont définies comme les cellules semi-algébriques, mais avec un centre et des bornes définissables. De même, la notation $\mathcal{U}_{e,n}(x, t)$ introduite au début de la section 1.3 désigne ici une fonction quelconque définissable (et non plus seulement semi-algébrique) à valeurs dans $U_{e,n} = U_e \cdot (1 + \pi^n R)$.

25. J'appelle ici quasiment p -optimal ce que nous appelions p -optimal dans [Darnière et Halpuczok, 2017], car j'incorporerai plus loin à la p -optimalité une condition supplémentaire, qui en était séparée dans [Darnière et Halpuczok, 2017].

26. Là encore je m'écarte légèrement de la terminologie de [Darnière et Halpuczok, 2017], où nous appelions d -basiques les parties définies par une condition $f(x) \in P_N \cup \{0\}$ avec une fonction d -basique. Les réunions finies d'ensembles d -basique au sens ci-dessus et les combinaisons booléennes d'ensembles d -basiques, au sens ci-dessus ou au sens de [Darnière et Halpuczok, 2017], sont de toutes façons une seule et même chose.

Théorème 1.4.10 (Préparation des fonctions définissables). Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ un corps p -optimal. Soient $\theta_1, \dots, \theta_r : S \subseteq K^m \rightarrow K$ des fonctions définissables.

Il existe un entier $e \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des entiers $N, M \in \mathbb{N}^*$ tels que $e|N$ et $M > v(e)$, et une partition finie de S en cellules A modulo $Q_{N,M}^\times$ sur chacune desquelles, pour $1 \leq i \leq r$,

$$\theta_i(x, t) = \mathcal{U}_{e,n}(x, t) \cdot h(x) \cdot [\lambda_A^{-1}(t - c_A(x))]^{\frac{\alpha}{e}}$$

où $h : \hat{A} \rightarrow K$ est une fonction semi-algébrique, et α un entier relatif (tous dépendants de i et de A).

Remarque 1.4.11. Le théorème 1.4.10 avec $m = 1$ montre en particulier que pour toute fonction définissable $f : A \subseteq K \rightarrow K$ la fonction $|f|$ est semi-algébrique. La propriété des valeurs extrêmes en découle. Tout corps quasiment p -optimal pour lequel le théorème de préparation des fonctions définissables est valide possède donc nécessairement la propriété des valeurs extrêmes.

Le théorème de préparation montre que toute fonction définissable sur un corps p -optimal peut être « semi-algébrique » au sens suivant.

Corollaire 1.4.12. Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ un corps p -optimal. Soient $\theta_1, \dots, \theta_r : S \subseteq K^m \rightarrow K$ des fonctions définissables.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $e \in \mathbb{N}^*$, des fonctions semi-algébriques $\theta'_i : S' \rightarrow K$ et une bijection définissable $\varphi : S' \rightarrow S$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $x \in A'$,

$$\theta_i \circ \varphi(x) = \mathcal{U}_{e,n}(x) \theta'_i(x).$$

En particulier tout ensemble définissable sur un corps p -optimal est en bijection définissable avec un ensemble semi-algébrique. Comme les bijections définissables préservent la dimension (sur un corps P -minimal quelconque, voir [Haskell et Macpherson, 1997]) le résultat suivant découle alors immédiatement du corollaire 1.4.12 et de [Cluckers, 2001].

Théorème 1.4.13. Deux ensembles infinis définissables sur un corps p -optimal sont en bijection définissable si et seulement s'ils ont la même dimension.

Chapitre 2

Treillis topologiques et anneaux

J'en suis venu à m'intéresser aux treillis enrichis (algèbres de Heyting ou co-Heyting, treillis échelonnés, *etc*) un peu malgré moi et par des chemins détournés. Dans ma thèse de doctorat je montrais comment un théorème de géométrie arithmétique, dû initialement à [Rumely, 1986] puis largement généralisé par [Moret-Bailly, 1989] d'une part, [Green *et al.*, 1995] d'autre part, permettait d'axiomatiser la théorie complète de la clôture intégrale de \mathbb{Z} (resp. $\mathbb{F}_p[T]$) dans diverses « grandes » extensions algébriques de \mathbb{Q} (resp. $\mathbb{F}_p(T)$), et ainsi de prouver que ces anneaux avaient une théorie complète décidable. Cette axiomatisation faisait intervenir une structure auxiliaire, le « treillis résiduel » de l'anneau, défini comme suit.

Soit A un anneau¹ quelconque, et $\text{Specmax } A$ son spectre maximal. Pour toute partie A_0 de A notons $J(A_0)$ le radical de Jacobson de l'idéal engendré par A_0 :

$$J(A_0) = \bigcap \{ \mathfrak{m} \in \text{Specmax } A \mid A_0 \subseteq \mathfrak{m} \}.$$

Sur l'ensemble des parties finies de A , considérons la relation

$$\{a_1, \dots, a_m\} \leq \{b_1, \dots, b_n\} \iff J(a_1, \dots, a_m) \supseteq J(b_1, \dots, b_n).$$

Ce préordre est une variante d'un cas particulier de la notion de « relation radicale », introduite dans [Prestel et Schmid, 1990] pour axiomatiser l'anneau de tous les entiers algébriques (autrement dit la clôture intégrale de \mathbb{Z} dans une clôture algébrique de \mathbb{Q}). L'idée était d'ailleurs déjà présente dans [van den Dries, 1988]. Cette relation radicale particulière est le plus souvent définissable dans A , et l'ordre quotient, noté $L_{\text{rad}}(A)$, est donc interprétable dans A . Dans tous les cas $L_{\text{rad}}(A)$ est un treillis distributif, que j'appelle le **treillis résiduel** de A . Pour la plupart des anneaux issus de la géométrie ou de l'arithmétique, $L_{\text{rad}}(A)$ possède en fait une structure plus riche que celle de treillis : c'est au moins une « algèbre co-Heyting » (voir plus loin).

J'étudiais dans ma thèse les anneaux intègres A satisfaisant la propriété suivante.

LGPH Pour toute variété V définie sur le corps des fractions de A et géométriquement irréductible, si V possède un point lisse dans le hensélisé de tout anneau de valuation centré sur un idéal maximal de A , alors V possède un point dans A .

Bien que cette propriété ne semble pas du tout du premier ordre, je montrais que la classe des anneaux satisfaisant le LGPH *et* dont le treillis résiduel était « localement complété » (voir plus loin), était élémentaire. Cette condition supplémentaire n'était pas contraignante dans la mesure où tous les anneaux connus pour satisfaire le LGPH sont de dimension 0 ou 1, ce qui entraîne automatiquement que leur treillis résiduel est localement complété, mais il était tout de même agaçant de ne pas réussir à s'en passer pour axiomatiser le LGPH. Le reste de mon travail consistait pour l'essentiel à montrer que, sous des hypothèses très générales, la théorie complète d'un tel anneau A se ramène à celle de ses fibres (les hensélisés des localisés de A par ses idéaux maximaux) *et à celle de*

1. Dans ce mémoire le terme « anneau » signifie toujours « anneau commutatif unitaire ».

son treillis résiduel, puis à appliquer ce résultat à divers anneaux entiers sur \mathbb{Z} et $\mathbb{F}_p[T]$. J'en déduisais que les théories complètes de ces anneaux étaient décidables, modèle-complètes, voire éliminaient les quantificateurs dans certains langages (voir l'annexe 2), à condition notamment que les théories de leurs treillis résiduels aient aussi ces propriétés.

Il devenait alors nécessaire, pour déterminer les propriétés modèle-théoriques d'anneaux satisfaisant le LGPH, mais aussi d'autres anneaux pour lesquels le treillis résiduel pouvait jouer un rôle important, de mieux connaître les théories d'algèbres co-Heyting, et particulièrement celles admettant une modèle-complétion. Une fois rappelées les définitions générales dans la section 2.1, ce chapitre présente les résultats de cette étude regroupés comme suit.

1. *Anneaux de fonctions définissables continues (section 2.2)*. Soit \mathcal{K} une structure enrichissant un corps ordonné (K, \leq) ou valué (K, v) . Pour tout ensemble définissable $X \subseteq K^n$, soit $\mathcal{C}(X)$ l'anneau des fonctions définissables continues de X dans K . Sous des hypothèses extrêmement générales sur la structure \mathcal{K} et la géométrie de X , en particulier quand \mathcal{K} est o-minimale, P-minimale ou que K est un corps local, nous montrons dans [Darnière et Tressl, 2019] que l'anneau \mathbb{Z} est interprétable, voire définissable dans $\mathcal{C}(X)$. En application nous obtenons par exemple que même si K est une extension élémentaire (stricte) de \mathbb{R} ou \mathbb{Q}_p , le plongement naturel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_p^n)$) dans $\mathcal{C}(K^n)$ n'est pas un plongement élémentaire si $n \geq 2$ (resp. $n \geq 1$).
2. *Treillis échelonnés (section 2.3)*. Le treillis résiduel de l'anneau $\mathcal{C}(X)$ est le plus souvent isomorphe au treillis $L(X)$ des parties définissables fermées dans X . C'est un exemple typique de treillis n -échelonné, pour $n = \dim X$. Depuis [Grzegorzczuk, 1951] sa théorie complète est connue pour être indécidable dans le cas réel ou algébriquement clos, dès que $\dim X \geq 2$. Dans [Darnière, 2019a] j'ai montré, entre autres choses, que la théorie des treillis n -échelonnés atomiques avait cependant une modèle-complétion T_n . En outre T_n est localement finie, ce qui permet de classer facilement ses modèles à équivalence élémentaire près. L'axiomatisation de T_n repose principalement sur une propriété de découpage des fermés. Or la triangulation p -adique montre que si K est p -adiquement clos, ce découpage est possible pour les fermés semi-algébriques dans K^n (voir chapitre 1, théorème 1.3.15). Dans ce cas $L(K^n)$ est donc un modèle de T_n , ce qui permet de montrer que sa théorie complète est décidable, contrairement au cas réel clos. Je montre en particulier que la théorie complète de $L(K^n)$ ne dépend que de n , pas du corps p -adiquement clos K considéré, ni même (!) du nombre premier p .
3. *Algèbres co-Heyting (section 2.4)*. Dans [Darnière et Junker, 2018], nous introduisons une notion de dimension et de co-dimension pour les éléments d'une algèbre co-Heyting L , directement inspirées de celles de la géométrie *via* la dualité de Stone. Nous montrons comment la co-dimension permet de définir une pseudo-métrique sur L , dont nous étudions la complétion \hat{L} (au sens usuel, des suites de Cauchy). Nous montrons par exemple que toute suite monotone et bornée dans \hat{L} est convergente, et que \hat{L} coïncide avec la limite projective des quotients de L de dimension finie. Dans le cas où L est pré-compacte, \hat{L} est aussi la complétion profinie de L . Enfin nous généralisons aux algèbres co-Heyting pré-compactes nombre de propriétés connues seulement pour les algèbres co-Heyting de présentation finie, en particulier celles concernant leurs éléments irréductibles.

Dans [Darnière et Junker, 2010] nous reprenons la construction de [Bellissima, 1986] pour en dégager quelques résultats nouveaux sur l'algèbre co-Heyting libre à n générateurs \mathcal{F}_n . En particulier nous montrons que \mathcal{F}_n possède un unique n -uplet de générateurs, définissable dans \mathcal{F}_n , ce qui montre que son groupe d'automorphisme n'est autre que le groupe symétrique.

Enfin, on sait depuis [Ghilardi et Zawadowski, 1997] qu'il existe exactement huit variétés d'algèbres co-Heyting admettant une modèle-complétion. Pour les six d'entre elles qui sont localement finies nous redémontrons ce résultat dans [Darnière et Junker, 2018] par une méthode totalement différente, basée sur la théorie des modèles et sur une intuition géométrique

inspirée des treillis échelonnés. Cette méthode fournit de ces modèle-complétions une compréhension plus intuitive, basée sur une axiomatisation finie qui leur faisait défaut jusque là. Le cas des deux dernières variétés a résisté plus longtemps, mais est finalement résolu dans [Darnière, 2018].

2.1 Prérequis

Rappelons qu'un **treillis** est un ensemble L muni d'un ordre partiel pour lequel toute partie finie possède une borne supérieure et une borne inférieure dans L . Appliquée à la partie vide, cette définition implique que L possède un plus grand élément $\mathbf{1}$ et un plus petit élément $\mathbf{0}$. On note $a \vee b$ la borne supérieure de $\{a, b\}$, et $a \wedge b$ sa borne inférieure. Le treillis est **distributif** si les lois \vee et \wedge sont distributives l'une sur l'autre.

2.1.1 Dualité de Stone et complémentations partielles

L'ensemble des filtres premiers d'un treillis distributif L est noté $\text{Spec}^\dagger L$. Il est muni de la topologie de Zariski, définie en prenant comme base de fermés les parties

$$P^\dagger(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^\dagger L \mid a \in \mathfrak{p}\}$$

où $a \in L$. Comme $P^\dagger(a \vee b) = P^\dagger(a) \cup P^\dagger(b)$ et $P^\dagger(a \wedge b) = P^\dagger(a) \cap P^\dagger(b)$, l'application P^\dagger de L vers l'ensemble $\mathcal{P}(\text{Spec}^\dagger L)$ des parties de $\text{Spec}^\dagger L$ induit un isomorphisme de treillis de L sur son image. On peut donc retrouver le treillis à partir de son spectre : une partie de $\text{Spec}^\dagger L$ est dans l'image de P^\dagger si et seulement si son complémentaire est un ouvert quasi-compact. En outre cette correspondance entre treillis et spectre est fonctorielle, ce qui établit une équivalence de catégories entre treillis et espaces spectraux appelée « dualité de Stone ».

Remarque 2.1.1. Dans son article fondateur, [Hochster, 1969] caractérise les espaces topologiques homéomorphes à des spectres d'anneaux. Il ressort de cette caractérisation que ces espaces, appelés depuis « espaces spectraux » sont exactement les mêmes que les spectres de treillis.

Un treillis est **localement complémenté** si

$$\forall a, b [b \leq a \neq \mathbf{1} \Rightarrow \exists c, P^\dagger(a) \setminus P^\dagger(b) = P^\dagger(c)].$$

Par la dualité de Stone, L est localement complémenté si et seulement si pour tout $a \in L \setminus \{\mathbf{1}\}$, le treillis des éléments inférieurs ou égaux à a est une algèbre de Boole. Du point de vue de la théorie des treillis ils n'apportent donc pas grand chose, car leur théorie est essentiellement la même que celle des algèbres de Boole. Cependant ils occupaient une place centrale dans ma thèse puisque tout anneau A entier sur \mathbb{Z} ou sur $\mathbb{F}_p[T]$, ainsi que de tout localisé de A , possède un treillis résiduel localement complémenté.

Plus généraux, et beaucoup plus étudiés, sont les treillis **topologiquement complémentés** pour lesquels

$$\forall a, b \exists c, \overline{P^\dagger(a) \setminus P^\dagger(b)} = P^\dagger(c).$$

Par la dualité de Stone, L est topologiquement complémenté si et seulement si pour tous $a, b \in L$, il existe un élément de L , noté $a - b$, tel que

$$a - b = \inf\{c \in L \mid a \leq b \vee c\}.$$

Les treillis localement complémentés en sont un cas (très) particulier. Un exemple beaucoup plus typique de treillis topologiquement complémenté est celui des fermés d'un espace topologique, avec l'opération supplémentaire

$$A - B = \overline{A \setminus B}.$$

On appelle **algèbres de Heyting** les treillis distributifs L dans lesquels, pour tous $a, b \in L$, il existe un élément, noté $b \rightarrow a$, tel que

$$b \rightarrow a = \sup \{x \in L \mid c \wedge b \leq a\}.$$

À l'évidence, il s'agit là des treillis dont l'**opposé** L^{op} est topologiquement complémenté. Pour cette raison les treillis topologiquement complémenté sont plus souvent appelés **algèbres co-Heyting**, bien que cette terminologie soit beaucoup moins parlante.

Les algèbres de Heyting ont surtout été étudiées en lien avec la logique intuitionniste, car elles sont aussi les modèles algébriques du calcul propositionnel intuitionniste (comme les algèbres de Boole sont les modèles algébriques du calcul propositionnel classique), voir plus loin.

2.1.2 Dimension, co-dimension

La dualité de Stone suggère, par analogie avec les spectres d'anneaux de la géométrie algébrique, de définir comme suit la **dimension** et la **co-dimension** d'un élément a d'un treillis distributif L . On convient que $\dim_L \mathbf{0} = -\infty$, $\text{codim}_L \mathbf{0} = +\infty$, et si $a \neq \mathbf{0}$

$$\dim a = \sup \{ \text{co-rang } \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in P^\dagger(a) \} \quad \text{codim } a = \inf \{ \text{rang } \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in P^\dagger(a) \}$$

où le rang (resp. le co-rang) de \mathbf{p} est simplement son rang de fondation dans $\text{Spec}^\dagger L$, pour l'ordre d'inclusion (resp. pour l'ordre inverse). Quand elles sont définies, ces grandeurs sont des ordinaux. Mais on peut se limiter aux valeurs finies et convenir que $\dim a = +\infty$ dès que $\dim a \geq \aleph_0$. Autrement dit, pour tout entier $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \dim a \geq d &\iff \exists \mathbf{p} \in P^\dagger(a), \exists \mathbf{p}_d \subset \dots \subset \mathbf{p}_2 \subset \mathbf{p}_1 \in \text{Spec}^\dagger L, \mathbf{p} \subset \mathbf{p}_d, \\ \text{codim } a \geq d &\iff \forall \mathbf{p} \in P^\dagger(a), \exists \mathbf{p}_d \supset \dots \supset \mathbf{p}_2 \supset \mathbf{p}_1 \in \text{Spec}^\dagger L, \mathbf{p} \supset \mathbf{p}_d. \end{aligned}$$

Enfin on pose $\dim L = \dim \mathbf{1}$.

Exemple 2.1.2. Si V est une variété algébrique (au sens le plus naïf, c'est-à-dire un fermé de Zariski dans l'espace affine K^n sur un corps algébriquement clos K , voire un corps infini quelconque), et si $L(V)$ est l'ensemble de ses sous-variétés alors pour tout $A \in L(V)$, la dimension de A et la co-dimension de A dans V au sens usuel de la géométrie algébrique, coïncident avec sa dimension et sa co-dimension dans $L(V)$ au sens ci-dessus. En particulier $\dim L(V) = \dim V$.

Exemple 2.1.3. Soit $\mathcal{K} = (K, \dots)$ une structure dp-minimale sur un corps K , non fortement minimale, qui le munit d'une topologie (typiquement \mathcal{K} est une structure C-minimale, o-minimale ou P-minimale). $X \subseteq K^n$ est une partie définissable, et $L(X)$ est l'ensemble des parties définissables fermées dans X . Pour tout $A \in L(X)$ la dimension de A et la co-dimension de A dans V au sens usuel des structures dp-minimales (voir la section 1.4 pour le cas P-minimal, [Simon et Walsberg, 2018] pour sa généralisation aux dp-minimaux) coïncident avec sa dimension et sa co-dimension dans $L(X)$ au sens ci-dessus. En particulier $\dim L(X) = \dim X$.

Toujours par analogie avec les espaces topologiques généraux, l'**ordre fort** est défini par

$$b \ll a \iff P^\dagger(b) \subseteq \overline{P^\dagger(a) \setminus P^\dagger(b)}.$$

Autrement dit $b \ll a$ si et seulement si $P^\dagger(b) \ll P^\dagger(a)$. Notons que c'est un ordre strict sur $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ mais pas sur L puisque $\mathbf{0} \ll \mathbf{0}$. L'ordre fort est définissable. :

$$b \ll a \iff \forall c, (a \leq b \vee c \Rightarrow b \leq c).$$

Si on se limite aux algèbres co-Heyting, il est même définissable sans quanteur :

$$b \ll a \iff b \leq a - b.$$

En revanche la dimension ou la co-dimension d ne sont pas *a priori* des propriétés définissables dans un treillis distributif L , mais le deviennent si on se restreint aux algèbres co-Heyting, grâce au résultat suivant.

Proposition 2.1.4 ([Darnière et Junker, 2011, Theorem 3.8]). *Soit L une algèbre co-Heyting. Pour tout $a \in L$ et tout $d \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \dim a \geq d &\iff \exists a_0, \dots, a_d \in L \setminus \{\mathbf{0}\}, a_d \ll \dots \ll a_0 \leq a, \\ \text{codim } a \geq d &\iff \exists a_0, \dots, a_d \in L \setminus \{\mathbf{0}\}, a \leq a_d \ll \dots \ll a_0. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.5. [Hosoi, 1967] introduit une notion de tranches (« slices ») \mathcal{S}_d pour les algèbres de Heyting. En prenant l'ordre opposé, \mathcal{S}_d est la classe d'algèbres co-Heyting axiomatisée par l'unique équation $P_d = \mathbf{0}$, où $(P_n(x_1, \dots, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de termes définie par récurrence en posant $P_0 = \mathbf{1}$ et, pour tout entier n ,

$$P_{n+1} = (P_n - x_{n+1}) \wedge x_{n+1}.$$

\mathcal{S}_d est donc une variété d'algèbres co-Heyting, et il n'est pas difficile de montrer que c'est exactement la classe des algèbres co-Heyting de dimension $< d$.

2.1.3 Calcul propositionnel intuitionniste et modèles de Kripke

Les formules du calcul propositionnel intuitionniste sont construites suivant les règles usuelles à partir des variables propositionnelles, des constantes \perp , \top et des seuls connecteurs logiques \vee , \wedge , \rightarrow . Ce sont donc aussi bien des termes du langage des algèbres de Heyting, en identifiant \perp et \top à $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ respectivement. En outre les algèbres de Heyting sont les modèles algébriques du calcul propositionnel intuitionniste, au sens où : une formule $\varphi(x)$ en n variables du calcul propositionnel intuitionniste est une tautologie si et seulement pour toute algèbre de Heyting H et tout $a \in H^n$, $\varphi(a) = \mathbf{1}$.

Remarque 2.1.6. Les variétés d'algèbres de Heyting sont les classes élémentaires axiomatisées par des équations, qu'on peut toujours écrire sous la forme $\varphi(x) = \mathbf{1}$. Elles sont donc en correspondance bi-univoques avec les logiques super-intuitionnistes, obtenues en rajoutant de nouvelles tautologies (ici par exemple $\varphi(x)$) à la logique intuitionniste. Toutes les logiques intermédiaires entre la logique classique et la logique intuitionniste sont de ce type.

Propriété 2.1.7 (du modèle fini). *Si une formule $\varphi(x)$ en n variables du calcul propositionnel intuitionniste n'est pas une tautologie, alors on peut trouver une algèbre de Heyting H finie telle que $\varphi(a) \neq \mathbf{1}$ pour au moins un $a \in H^n$.*

En renversant l'ordre, la propriété du modèle fini indique que pour tout terme $t(x)$ des algèbres co-Heyting, si $t(a) \neq \mathbf{0}$ pour un certain n -uplet a d'une algèbre co-Heyting L , alors il existe une algèbre co-Heyting finie L_0 telle que $t(a_0) \neq \mathbf{0}$ pour un certain $a_0 \in L_0^n$.

Une autre façon classique de tester la validité d'une formule en n variables du calcul propositionnel intuitionniste est d'utiliser les **modèles de Kripke** en n variables. Il s'agit d'un triplet $\mathcal{K} = (K, \leq, \text{val})$ où (K, \leq) est ensemble ordonné, et $\text{val} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ une application décroissante (ou croissante, selon les auteurs), c'est-à-dire que $\text{val}(\omega') \supseteq \text{val}(\omega)$ pour tous $\omega' \leq \omega \in K$. En tout point $\omega \in K$ la validité d'une formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, notée $\omega \models \varphi$, est définie par récurrence.

- $\omega \not\models \perp$ et $\omega \models \top$.
- Pour $1 \leq i \leq n$, $\omega \models x_i \iff i \in \text{val}(\omega)$.
- $\omega \models \varphi \vee \psi$ (resp. $\varphi \wedge \psi$) $\iff \omega \models \varphi$ ou (resp. et) $\omega \models \psi$.
- $\omega \models \varphi \rightarrow \psi \iff \forall \omega' \leq \omega$, si $\omega' \models \varphi$ alors $\omega' \models \psi$.

Il s'ensuit, par une récurrence immédiate, que si une formule φ est valide en un point ω alors elle est aussi valide en tout point $\omega' \leq \omega$. Autrement dit l'ensemble

$$\llbracket \varphi \rrbracket = \{\omega \in K \mid \omega \models \varphi\}$$

est une partie décroissante de K . L'ensemble $\mathcal{O}^\downarrow(\mathcal{K})$ des parties décroissantes de K est une algèbre de Heyting² engendrée par les $\llbracket x_i \rrbracket$ pour $1 \leq i \leq n$. On peut montrer que toute algèbre de Heyting

2. En effet $\mathcal{O}^\downarrow(\mathcal{K})$ est aussi l'ensemble des ouverts d'une topologie sur \mathcal{K} .

finie est de ce type. Inversement, si \mathcal{K} est fini, on peut le reconstruire à partir du spectre de $\mathcal{O}^\downarrow(\mathcal{K})$ et des générateurs $\llbracket x_1 \rrbracket, \dots, \llbracket x_n \rrbracket$. On peut montrer que tout modèle de Kripke fini **réduit**, c'est-à-dire dont deux points distincts ne satisfont jamais exactement les mêmes formules, est de ce type.

On a donc une dualité parfaite entre algèbres de Heyting finies engendrées par n éléments et modèles de Kripke finis, réduits, en n variables. En particulier, par la propriété 2.1.7 du modèle fini, une formule du calcul propositionnel intuitionniste est une tautologie si et seulement si elle est valide en tout point de tout modèle de Kripke fini.

2.2 Anneaux de fonctions définissables continus

Dans cette partie je considère un corps K fixé, et je note \mathcal{O} :

- l'intervalle $[-1; 1]$ d'un ordre total \leq sur K , ou;
- l'anneau d'une valuation non triviale v sur K .

Dans les deux cas (K, \mathcal{O}) est un corps topologique. L'ensemble \mathcal{O}^\times des éléments $u \in K^\times$ tels que u et $u^{-1} \in \mathcal{O}$ est un sous-groupe multiplicatif de K^\times , et je note $\mathcal{M} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times$. Plus généralement, soit $\mathcal{K} = (K, \mathcal{O}, \dots)$ une structure enrichie dans un langage \mathcal{L} contenant $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\mathcal{O}\}$, où \mathcal{L}_{ann} est le langage des anneaux. Je supposerai vérifiée l'hypothèse suivante.

(DiscFin) Toute partie de K définissable, discrète, fermée et bornée est finie.

C'est bien évidemment le cas si \mathcal{O} est compact, mais aussi si \mathcal{K} est o-minimale, P-minimale ou C-minimale, et plus généralement si \mathcal{K} est dp-minimale non fortement minimale, ainsi que dans de très nombreux autres cas, voir [van den Dries, 1998], [Haskell et Macpherson, 1997], [Haskell et Macpherson, 1994], pour les cas « o/P/C-minimaux », [Simon, 2011] et [Jahnke *et al.*, 2017] pour les dp-minimaux, ou encore [van den Dries, 1989] pour les corps valués henséliens de caractéristique nulle.

Je note $\mathcal{C}(X)$ l'anneau des fonctions continues de $X \subseteq K^n$ dans K , et $\mathcal{C}(X, Y)$ le sous-ensemble de celles à valeurs dans $Y \subseteq K$. Pour un point $p_0 \in X$, je note $\mathcal{C}_{p_0}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ telles que $f(p_0) \in Y$. Selon les cas je prendrai pour Y l'anneau \mathbb{Z} , ou l'ensemble

$$\tau^{\mathbb{Z}} = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

pour un certain $\tau \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$. Enfin $\mathcal{C}(X)$ est muni de la $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\mathcal{B}\}$ -structure définie par

$$\mathcal{B} = \{s \in \mathcal{C}(X) \mid \forall x \in X, s(x) \in \mathcal{O}\}.$$

Lemme 2.2.1. *Pour toute formule $\varphi(y)$ de \mathcal{L}_{ann} (resp. $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \mathcal{O}$) en k variables et sans paramètre, il existe une formule $[\varphi](y, z)$ de \mathcal{L}_{ann} (resp. $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\mathcal{B}\}$) en $k+1$ variables et sans paramètre, telle que pour toutes $f \in \mathcal{C}(X)^k$ et $s \in \mathcal{C}(X)$*

$$(\mathcal{C}(X), \mathcal{B}) \models [\varphi](f, s) \iff \forall a \in s^{-1}(\{0\}), (K, \mathcal{O}) \models \varphi(f(a)).$$

Remarque 2.2.2. En particulier \mathcal{B} est définissable dans l'anneau $\mathcal{C}(X)$ chaque fois que \mathcal{O} l'est dans le corps K . C'est le cas notamment quand K est :

- \mathbb{Q} muni de son ordre (par le théorème des quatre carrés);
- un corps réel clos ou p -adiquement clos;
- un corps valué de séries de Laurent en une variable;
- un corps valué dp-minimal non algébriquement clos;
- et pour bien d'autres corps valués, voir [Fehm et Jahnke, 2017].

En revanche ce n'est évidemment jamais le cas si K est algébriquement clos.

Le résultat principal de [Darnière et Tressl, 2019] est que, sous des hypothèses extrêmement générales sur \mathcal{K} et X , l'anneau \mathbb{Z} est interprétable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$. Il est donc directement interprétable dans $\mathcal{C}(X)$ chaque fois que \mathcal{B} lui-même est définissable dans cet anneau. La seule hypothèse sur \mathcal{K}

est (DiscFin), et on suppose en outre que X est « radiante » en au moins un point p_0 . Cette dernière condition est de nature topologico-géométrique. Intuitivement, elle signifie que l'on peut approcher p_0 dans X par un nombre arbitrairement grand de chemins disjoints.

Plus précisément, j'appelle fonction **radiale** en un point p_0 de X toute fonction $s : X \rightarrow K$ définissable et continue au voisinage de p_0 , qui possède en p_0 un zéro non isolé. X est **radiante** en p_0 (ou, avec la terminologie de [Darnière et Tressl, 2019], X « a un nombre infini de germe en p_0 ») si pour tout entier $k \geq 1$ il existe des fonctions radiales s_1, \dots, s_k , un voisinage U de p_0 dans X et des fonctions $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathcal{C}(U \setminus \{p_0\})$, bornées sur $U \setminus \{p_0\}$ telles que :

- les $S_i = s_i^{-1}(\{0\}) \setminus \{p_0\}$ sont deux à deux disjoints et inclus dans U ;
- chaque fonction δ_i vaut 1 sur S_i , et 0 sur $\bigcup_{j \neq i} S_j$.

Exemple 2.2.3. K^n est radiant en tout point, dès que $n \geq 2$ (voire $n \geq 1$ si \mathcal{K} est P-minimale). Plus généralement, si \mathcal{K} est dp-minimale et si $X \subseteq K^n$ est définissable, alors X est radiante en tout point p_0 tel que $\dim(X, p_0) \geq 2$. Dans le cas P-minimal, il suffit même que $\dim(X, p_0) \geq 1$, autrement dit que p_0 ne soit pas un point isolé.

Théorème 2.2.4. On suppose que \mathcal{K} satisfait (DiscFin) et que X est radiante en un point p_0 . Soient $\tau \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, $p \in \mathcal{C}(X)$ telle que $p^{-1}(\{0\}) = \{p_0\}$, et $\tau^* \in \mathcal{C}(X)$ telle que $\tau^*(p_0) = \tau$.

1. $\mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ est définissable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$, par une formule $\text{Int}^*(h, p, \tau^*)$.
2. Si $^3\mathcal{O} = [-1, 1]$ alors $\mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ est définissable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$, par une formule $\text{Int}^+(h, p, \tau^*)$.

En outre ces définitions sont uniformes : les formules Int^* et Int^+ , qui n'ont pas d'autres paramètres que p et τ^* (h est une variable libre), ne dépendent ni de X , ni de \mathcal{K} , ni du choix de ces paramètres particuliers.

Corollaire 2.2.5. Sous les hypothèses du théorème 2.2.4, l'anneau \mathbb{Z} est interprétable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$.

Démonstration. D'après [Richard, 1989] il suffit de montrer que $(\mathbb{Z}, +, |, \leq)$ est interprétable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$, où $|$ désigne la relation de divisibilité dans \mathbb{Z} . Pour chaque $f \in \mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ notons $\sigma(f)$ l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(p_0) = \tau^k$. La relation d'équivalence $\sigma(f) = \sigma(g)$ sur $\mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ est définissable : le lemme 2.2.1 appliqué à la formule $x = y$ donne une formule $[\varphi](x, y, z)$ telle que

$$(\mathcal{X}(X), \mathcal{B}) \models [\varphi](f, g, p) \iff \forall a \in p^{-1}(\{0\}), K \models \varphi(f(a), g(a)) \iff f(p_0) = g(p_0).$$

D'après le théorème 2.2.4, $\mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ est définissable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$, le quotient par cette relation est donc interprétable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$. On peut l'identifier à \mathcal{Z} .

De même les relations $\sigma(f) + \sigma(g) = \sigma(h)$, $\sigma(f) | \sigma(g)$ et $\sigma(f) \leq \sigma(g)$ sont définissables :

- la première parce que $\sigma(fg) = \sigma(f) + \sigma(g)$;
- la deuxième par la formule $\text{Int}^*(f, p, g)$, puisque $\sigma(f) | \sigma(g) \iff g(p_0) \in (f(p_0))^{\mathbb{Z}}$;
- et la dernière par le lemme 2.2.1 appliqué à la formule $\exists z \in \mathcal{O}, x = zy$, en effet $\tau \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ donc $\sigma(f) \leq \sigma(g) \iff \tau^{\sigma(f) - \sigma(g)} \in \mathcal{O} \iff f(p_0) / g(p_0) \in \mathcal{O}$.

C'est donc bien toute la structure $(\mathbb{Z}, +, |, \leq)$ qui est interprétable dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$. □

Soit R un corps réel clos contenant strictement \mathbb{R} . C'est une extension élémentaire de \mathbb{R} , qui induit donc un plongement de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}(R^n)$, et de $L(\mathbb{R}^n)$ dans $L(R^n)$. [Astier, 2013] a montré que ce plongement de $L(\mathbb{R}^n)$ dans $L(R^n)$ était élémentaire. Au contraire le corollaire 2.2.6 montre que celui de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}(R^n)$ ne l'est pas, pour $n \geq 2$. De même, si par exemple K est une extension élémentaire de \mathbb{Q}_p , [Darnière, 2019a] montre que $L(\mathbb{Q}_p^n) \not\leq L(K^n)$ (voir section 2.3.1) alors que $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_p^n) \not\leq \mathcal{C}(K^n)$ par le corollaire 2.2.6.

Disons que notre corps valué ou ordonné (K, \mathcal{O}) est τ -archimédien si pour tout $x \in K^\times$ il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x\tau^{-k} \in \mathcal{O}$, autrement dit tel que $|x| \leq |\tau|^k$ dans le cas ordonné, ou que $v(x) \leq kv(\tau)$ dans le cas valué. Par exemple un corps ordonné est archimédien au sens usuel (\mathbb{Z} est co-final dans K) si et seulement s'il est 2-archimédien (ou q -archimédien, pour un $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ quelconque). Notons que (K, \mathcal{O}) est τ -archimédien si et seulement s'il est τ^{-1} -archimédien, et qu'il n'est jamais τ -archimédien si $\tau \in \mathcal{O}^\times \cup \{0\}$. On peut donc toujours supposer $\tau \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$.

3. Il suffit en fait que \mathcal{K} admette un ordre total, compatible avec $+$ et définissable dans $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\mathcal{O}\}$.

Corollaire 2.2.6. Soit \mathcal{K}' une extension élémentaire de \mathcal{K} , et K' le corps sous-jacent. Supposons que \mathcal{K} et \mathcal{K}' satisfassent (DiscFin). Soit $X \subseteq K^n$ une partie définissable radiante en un point p_0 , et soit X' la partie de K'^n définie par la même formule que X . Si K est τ -archimédien, pour un certain $\tau \in K$, et que K' ne l'est pas, alors le plongement naturel de $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{C}(X'), \mathcal{B}')$ n'est pas élémentaire.

Démonstration. Soient $p \in \mathcal{C}(X)$ ne s'annulant qu'en p_0 , et τ^* la fonction constante de valeur τ . Soit $[\varphi](x, y, z)$ la formule donnée par le lemme 2.2.1 appliqué à la formule $xy^{-1} \in \mathcal{O}$. Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(p_0)\tau^{-k} \in \mathcal{O}$. La fonction $g = (\tau^*)^k$ vérifie donc $f(p_0)g(p_0)^{-1} \in \mathcal{O}$ et $g(p_0) \in \tau^{\mathbb{Z}}$. Il s'en suit que la formule

$$\forall f \exists g, [\varphi](f, g, p) \wedge \text{Int}^\times(g, p, \tau^*)$$

est satisfaite dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$. Or il est facile de voir qu'elle ne l'est pas dans $(\mathcal{C}(X'), \mathcal{B}')$, parce que K' n'est pas τ -archimédien (on utilise ici le fait que la définition de $\mathcal{C}_{p_0}(X, \tau^{\mathbb{Z}})$ dans $(\mathcal{C}(X), \mathcal{B})$ par la formule $\text{Int}^\times(h, p, \tau^*)$ est uniforme). \square

Quand \mathcal{K} possède une bonne théorie de la dimension pour les ensembles définissables, comme c'est le cas pour les structures dp-minimales, nous montrons en outre que l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\tau^{\mathbb{Z}}$ sur X tout entier est définissable, au moins si X est de pure dimension $d \geq 2$, voir [Darnière et Tressl, 2019, theorem 6.7] pour un énoncé plus précis. En particulier, dans le cas réel, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.2.7. Supposons que \mathcal{K} soit o-minimal. Pour toute partie définissable $X \subseteq K^n$, définissablement connexe et de pure dimension $d \geq 2$, l'anneau \mathbb{Z} (identifié au sous-anneau de $\mathcal{C}(X)$ formé des fonctions constantes à valeurs entières) est définissable dans $\mathcal{C}(X)$.

2.3 Treillis échelonnés

On rencontre des treillis échelonnés dans toute situation géométrique où, partant d'un objet X , on considère le treillis $L(X)$ des sous-objets de X fermés dans X . Ce sont des algèbres co-Heyting enrichies d'une fonction unaire C^i pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, et sujettes à certaines conditions détaillées plus loin. En voici quelques exemples, sur un corps infini K . Lorsque j'y ferai référence par la suite, ce sera sous le nom de **treillis géométriques** $L(X)$.

1. $X \subseteq K^n$ est une combinaison booléenne de fermés de Zariski, et $L(X)$ est le treillis des fermés de Zariski $A \subseteq X$. Je note $\text{ECH}_{\text{zar}}(K, d)$ la classe des treillis échelonnés de ce type, pour X de dimension $\leq d$.
2. $X \subseteq K^n$ un espace semi-affine (c'est-à-dire une réunion finie d'espaces affines dans K^n) et $L(X)$ l'ensemble des espaces semi-affines inclus dans X . Je note $\text{ECH}_{\text{aff}}(K, d)$ la classe des treillis échelonnés de ce type, pour X de dimension $\leq d$.
3. $\mathcal{K} = (K, \dots)$ est une structure dp-minimale sur K , non fortement minimale, qui le munit d'une topologie (typiquement \mathcal{K} est une structure C-minimale, o-minimale ou P-minimale). $X \subseteq K^n$ est une partie définissable, et $L(X)$ l'ensemble des parties définissables fermées dans X . Je note $\text{ECH}_{\text{def}}(\mathcal{K}, d)$ la classe des treillis échelonnés de ce type, pour X de dimension $\leq d$.

Dans les deux premiers cas nous avons affaire à des **treillis noethériens** (ie. dont le spectre est noethérien). Dans un tel treillis tout élément A est réunion finie d'éléments \vee -irréductibles maximaux. Le sup de ceux de dimension i forme la composante i -pure $A^i(A)$, qu'on notera $C^i(A)$.

Dans le dernier cas, c'est plutôt à l'aide de la dimension locale que $C^i(A)$ est définie. Pour tout $A \in L(X)$ et tout $a \in K$, la **dimension locale** $\dim(A, a)$ de A en a est par définition

$$\dim(A, a) = \inf \{ \dim(U \cap A) \mid U \text{ voisinage définissable de } a \}.$$

La composante i -pure de A est alors l'adhérence dans A de l'ensemble des points où $\dim(A, a) = i$.

Dans tous ces cas, un élément A de $L(X)$ est de **pure dimension** k si et seulement si tout ouvert non vide de A est de dimension k . Bien sûr la dimension dont nous parlons ici est de nature géométrique, mais pour tout élément A de $L(X)$ c'est aussi la dimension de A en tant qu'élément de l'algèbre co-Heyting $L(X)$ (voir section 2.1.2). Par analogie, dans une algèbre co-Heyting L quelconque, nous dirons donc qu'un élément $a \in L$ est **k -pur** si pour tout $b \in L$

$$a - b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \dim(a - b) = k.$$

Une algèbre co-Heyting L enrichie de fonctions unaires C^i est un **treillis (d -)échelonné**, pour un certain entier $d \in \mathbb{N}$, si elle satisfait les conditions suivantes.

$$(\text{SC}_1^d) \quad a = \bigvee_{0 \leq i \leq d} C^i(a) \quad \text{et} \quad \forall i > d, C^i(a) = \mathbf{0}.$$

$$(\text{SC}_2) \quad \forall i, \quad C^i(a) \text{ est } i\text{-pur}.$$

$$(\text{SC}_3) \quad \forall i \neq j, \quad \dim C^i(a) \wedge C^j(a) < \min(i, j).$$

Remarque 2.3.1. Dans un treillis d -échelonné, pour tout élément $a \in L$ de dimension k , $C^k(a)$ est le plus grand élément k -pur de L majoré par a . D'autre part $\dim a - C^k(a) < k$ et $C^i(a) = C^i(a - C^k(a))$ pour tout $i < k$, d'où il suit facilement que les fonctions C^i sont définissables (sans paramètre) dans la structure de treillis.

Il est néanmoins intéressant d'ajouter les symboles de fonction C^k dans le langage : cela permet de re-définir sans quanteur la dimension de a dans L comme le plus grand entier k tel que $C^k(a) \neq \mathbf{0}$, et ainsi d'en conserver la trace dans les sous-structures.

2.3.1 Sous-structures

Soit $\mathcal{L}_{\text{lat}} = \{\vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ le langage des treillis, et $\mathcal{L}_{\text{éch}} = \mathcal{L}_{\text{lat}} \cup \{-, (C^i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ celui des treillis échelonnés. J'appelle **treillis sous-(d -)échelonné** toute $\mathcal{L}_{\text{éch}}$ -sous-structure d'un treillis échelonné. Pour tout $d \in \mathbb{N}$ fixé, la classe des treillis sous- d -échelonné est évidemment élémentaire : c'est la classe des modèles de toutes les conséquences universelles de la théorie des treillis d -échelonnés. J'en donne dans [Darnière, 2019a] une axiomatisation plus éclairante, essentiellement finie (en dehors du schéma d'axiome $C^i(a) = \mathbf{0}$ pour tout $i > d$). Pour cela on démontre les deux résultats suivants.

Théorème 2.3.2. *Toute algèbre co-Heyting L de dimension $\leq d$ (resp. tout treillis d -échelonné) est localement finie : toute partie finie de L engendre une sous-structure finie. En outre il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de telles sous-structures engendrées par n éléments.*

On sait bien qu'il n'en va pas de même des algèbres co-Heyting plus générales : par exemple toute algèbre co-Heyting libre de type fini est infinie. Mais elles possèdent un nombre fini d'éléments de co-dimension $\leq d$, ce qui est la clé du théorème ci-dessus.

Théorème 2.3.3. *Soit L_0 un treillis sous-échelonné fini. Pour tout corps infini K il existe un espace semi-affine $X \subseteq K^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, tel que L_0 se plonge dans le treillis échelonné des espaces semi-affines inclus dans X .*

Esquisse de démonstration. Comme L_0 est fini, tout $a \in L_0$ est le sup de ses composantes \vee -irréductibles. Le plongement de L_0 dans L' se construit alors par récurrence sur le nombre d'éléments \vee -irréductibles de L_0 : il suffit de trouver, pour n assez grand, des sous-espaces affines de K^n reproduisant la même configuration combinatoire que les éléments \vee -irréductibles de L_0 . \square

Soit K un corps infini, éventuellement muni d'une topologie et d'une structure dp-minimale non fortement minimale comme au début de cette section. Soient $\text{ECH}_{\text{zar}}(K, d)$, $\text{ECH}_{\text{aff}}(K, d)$ et $\text{ECH}_{\text{def}}(\mathcal{K}, d)$ les classes treillis échelonnés définis plus haut. La théorie universelle d'une telle classe Σ est (par définition) l'ensemble des formules universelles de $\mathcal{L}_{\text{éch}}$ satisfaites par tous les treillis échelonnés $L \in \Sigma$.

Corollaire 2.3.4. *Avec les notations ci-dessus, $ECH_{zar}(K, d)$, $ECH_{aff}(K, d)$ et $ECH_{def}(\mathcal{K}, d)$ ont la même théorie universelle, indépendamment du corps K et/ou de la structure \mathcal{K} considérée. Cette théorie est exactement la théorie des treillis sous- d -échelonnés.*

Esquisse de démonstration. Comme tout treillis $L(X) \in ECH_{aff}(K, d)$ se plonge naturellement dans un treillis échelonné appartenant $ECH_{zar}(K, d)$ ou $ECH_{aff}(\mathcal{K}, d)$, il suffit de montrer le résultat pour $ECH_{aff}(K, d)$. Pour cela, il suffit de plonger toute \mathcal{L}_{ech} -sous-structure finiment engendrée L_0 d'un treillis d -échelonné L dans un treillis échelonné $L' \in ECH_{aff}(K, d)$. C'est ce que permet le théorème 2.3.3, puisque L_0 est fini d'après le théorème 2.3.2. \square

2.3.2 Modèle-complétion, application aux p -adiques

Le résultat principal de [Darnière, 2019a], déjà présent dans [Darnière, 2004], est le suivant.

Théorème 2.3.5. *Pour tout entier d , la théorie des treillis d -échelonnés admet une modèle-complétion dans \mathcal{L}_{ech} , axiomatisée par les deux conditions suivantes.*

(Caténarité) *Pour tous $r < q < p \in \mathbb{N}$ et tous $c < a \neq \mathbf{0}$ dans L , si a est p -pur et c est r -pur, il existe un élément q -pur b dans L tel que $c \leq b \leq a$.*

(Découpage) *Pour tous a, b_1, b_2 dans L , si $b_1 \vee b_2 \ll a \neq \mathbf{0}$, il existe des éléments $b_1 \leq a_1$ et $b_2 \leq a_2$, tous deux non nuls, tels que*

$$\begin{cases} a_1 = a - a_2 \\ a_2 = a - a_1 \\ a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 \end{cases}$$

Remarque 2.3.6. Si L est une algèbre de Boole, son unique structure de treillis échelonné est définissable sans quanteur puisque $C^0(a) = a$ pour tout a . Elle satisfait automatiquement l'axiome de caténarité. D'autre part elle satisfait celui de découpage si et seulement si son ordre est dense. On retrouve donc, comme cas particulier du théorème 2.3.5 quand $d = 0$, le résultat classique : la théorie des algèbres de Boole dense est la modèle-complétion de la théorie des algèbres de Boole.

J'appelle **super- (d) -échelonnés** les treillis échelonnés satisfaisant les deux axiomes ci-dessus, c'est-à-dire les modèles existentiellement clos de la théorie des treillis d -échelonnés pour au moins un entier $d \in \mathbb{N}$. Lorsque deux points $a_1, a_2 \in L$ satisfont relativement à a, b_1, b_2 la conclusion de l'axiome de découpage, je dirais que a_1 et a_2 **découpent a le long de b_1 et b_2** .

L'axiome de caténarité est assez naturel, et d'ailleurs vérifié par tous les exemples connus de treillis géométriques (voir section 2.3.1). L'axiome de découpage en revanche est beaucoup plus inhabituel. Il est satisfait par exemple dans toute algèbre de Boole dense, mais dans aucun des treillis échelonnés issus de la géométrie. En effet, si $L(X)$ est l'un de ces treillis géométriques, tout point A de X est un atome de $L(X)$, et ne peut donc être découpé. Le même raisonnement vaudrait pour tout élément \vee -irréductible de $L(X)$.

Plus généralement, si $A \in L(X)$ est une partie non vide définissablement connexe de X , il n'est pas possible de trouver deux parties non vides $A_1, A_2 \in L(X)$ qui découpent A le long de $B_1 = B_2 = \emptyset$: un tel découpage définirait une partition $\{A_1, A_2\}$ de A en deux ensembles définissables non vides à la fois ouverts et fermés dans A . L'axiome de découpage énonce donc une forme très forte de non connexité, tellement forte qu'elle ne peut être satisfaite par aucun treillis géométrique, ni aucun treillis admettant des éléments \vee -irréductibles. C'est sans doute pourquoi il n'avait jamais été soupçonné jusque-là. Pourtant, il apparaît naturellement dans plusieurs contextes différents :

- Il se trouve que cet axiome ne fait pas intervenir les composantes pure-dimensionnelles, et réapparaît tel que dans la modèle-complétion des algèbres de Heyting (voir la section 2.4.3, où j'en donnerai une esquisse de preuve).
- Le théorème 1.3.15 de découpage des ensembles semi-algébriques p -adiques montre que cet axiome est « presque » satisfait par $L(X)$ si $X \subseteq K^m$ est un ensemble semi-algébrique et K un corps p -adiquement clos : il faut seulement supposer que l'élément $A \in L(X)$ auquel on l'applique n'a pas de points isolés, autrement dit que $C^0(A) = \emptyset$.

Cette situation dans le cas p -adique suggère, comme on le fait pour les algèbres de Boole, de considérer également une variante « atomique » des treillis échelonnés. On ajoute pour cela au langage $\mathcal{L}_{\text{éch}}$ des prédicats unaires At_k . Dans le langage $\mathcal{L}_{\text{éch}}^{\text{At}} = \mathcal{L}_{\text{éch}} \cup \{(\text{At}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}\}$ les **treillis échelonnés atomiques** sont alors les treillis échelonnés dans lesquels chaque At_k désigne l'ensemble des éléments qui sont sup de k atomes. La théorie des treillis d -échelonnés atomiques admet elle aussi une modèle-complétion, axiomatisée par les deux même axiomes de caténarité et de découpage, à cette seule différence près que celui de découpage est limité aux éléments a tels que $C^0(a) \neq \mathbf{0}$. J'appelle bien entendu **super- (d) -échelonnés atomiques** les modèles de cette modèle-complétion.

Corollaire 2.3.7. *Soit $d \in \mathbb{N}$ un entier naturel quelconque. La théorie des treillis super- d -échelonnés contenant un treillis sous-échelonné donné est \aleph_0 -catégorique, donc complète. Si ce treillis est engendré par \emptyset elle est aussi récursivement axiomatisable, donc décidable, et toute théorie complète de treillis super- d -échelonnés est de ce type. La théorie des treillis super- d -échelonnés admet donc un nombre fini de complétions, toutes décidables. En particulier elle est elle-même décidable.*

Le même résultat vaut aussi, *mutatis mutandis*, pour les treillis super-échelonnés atomiques : la seule différence est qu'il y a un nombre dénombrable de sous-structures engendrées par \emptyset , donc un nombre dénombrable de complétions. Comme elles sont récursivement énumérables, la théorie des treillis super- d -atomiques échelonnés est encore décidable, pour tout d .

[Grzegorzcyk, 1951] montre que la théorie complète du treillis $L(\mathbb{R}^n)$ des fermés semi-algébriques de \mathbb{R}^n est indécidable, pour tout entier $n \geq 2$, un résultat qui a été généralisé à bien d'autres treillis géométriques par [Tressl, 2017]. Des théorèmes 1.3.15 et 2.3.5 on déduit que le cas p -adique fait exception à cette règle.

Corollaire 2.3.8. *Soit $X \subseteq K^n$ un ensemble semi-algébrique de dimension d sur un corps p -adiquement clos K . Le treillis échelonné atomique $L(X)$ des parties semi-algébriques fermées dans X est super- d -échelonné. Sa théorie complète est donc décidable, et élimine les quantificateurs dans $\mathcal{L}_{\text{éch}}^{\text{At}}$.*

Démonstration. $L(X)$ est super-échelonné atomique d'après le théorème 1.3.15 de découpage des fermés semi-algébriques p -adiques. Sa théorie complète est déterminée par la $\mathcal{L}_{\text{éch}}^{\text{At}}$ -sous-structure L_0 engendrée par \emptyset . Elle est donc récursivement axiomatisée par les axiomes de caténarité, de découpage, et par les équations et inéquations valides dans L_0 . \square

Remarque 2.3.9. En particulier, la théorie complète de $L(K^n)$ est la même pour tout corps p -adiquement clos K , quel que soit le nombre premier p : c'est celle des treillis super- n -échelonnés atomiques de pure dimension n .

2.4 Algèbres co-Heyting

2.4.1 Complétion pro-finie et ultramétrique

Soit L une algèbre co-Heyting. Pour tout entier d , posons⁴

$$dL = \{a \in L \mid \text{codim } L > d\}.$$

Enfin posons $\omega L = \bigcap_{d \in \mathbb{N}} dL$. Il est facile de voir que dL est un idéal de L . Le quotient L/dL est donc muni d'une structure naturelle d'algèbre co-Heyting.

Lemme 2.4.1. *Soit $\varphi : L \rightarrow L'$ un morphisme surjectif d'algèbres co-Heyting. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, $\varphi(dL) = dL'$ et*

$$\dim L' \leq d \iff dL \subseteq \ker \varphi.$$

En particulier (en prenant $\varphi = \text{Id}_L$) $\dim L \leq d$ si et seulement si $dL = \{0\}$.

4. Je m'écarte ici légèrement de la notation de [Darnière et Junker, 2011], où dL désignait l'ensemble des éléments de co-dimension $\geq d$.

Proposition 2.4.5. *Une variété \mathcal{V} d'algèbres co-Heyting a la propriété du modèle fini⁵ si et seulement si toute algèbre de présentation finie dans \mathcal{V} est pré-compacte et séparée.*

Proposition 2.4.6. *Soit L une algèbre co-Heyting séparée. Son quotient par un idéal I est séparé si et seulement si I est fermé.*

Nombre de propriétés connues des algèbres co-Heyting de présentation finie se généralisent aux pré-compactes, éventuellement séparées, avec (de mon point de vue) des preuves souvent plus simples basées sur le théorème 2.4.2 et sur le suivant.

Théorème 2.4.7. *Soit L une algèbre co-Heyting pré-compacte et séparée. Pour tout entier d les idéaux dL et $d\widehat{L}$ sont principaux, et engendrés par les mêmes éléments $\varepsilon_d(L) = \varepsilon_d(\widehat{L})$.*

En outre il existe pour tous $n, d \in \mathbb{N}$ un terme $t_d(x)$ en n variables tel que, pour toute algèbre co-Heyting L' (séparée ou non) engendrée par un n -uplet a , l'idéal dL' est principal et son générateur $\varepsilon_d(L') = t_{n,d}(a)$.

Notons $\mathcal{I}^\vee(L)$, $\mathcal{I}^\wedge(L)$, $\mathcal{I}^{\vee\vee}(L)$ et $\mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L)$ l'ensemble des éléments de L qui sont respectivement \vee -irréductibles, \wedge -irréductibles, complètement \vee -irréductibles et complètement \wedge -irréductibles.

Théorème 2.4.8. *Soit L une algèbre co-Heyting pré-compacte et séparée.*

1. L et \widehat{L} ont les mêmes éléments complètement irréductibles.
2. Tout élément \vee -irréductible de L (ou \widehat{L}) est complètement \vee -irréductible.
3. Un élément \wedge -irréductible de L est complètement \wedge -irréductible si et seulement s'il a un rang de co-fondation fini dans L .
4. Tout $x \in \mathcal{I}^{\vee\vee}(L)$ a un rang de co-fondation fini dans $\mathcal{I}^{\vee\vee}(L)$, qui est sa co-dimension dans L .
5. Tout $x \in \mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L)$ a un rang de co-fondation fini dans $\mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L)$, qui est sa dimension dans L^{op} .
6. Pour tout $a \in L$, $a = \bigvee \{x \in \mathcal{I}^{\vee\vee}(L) \mid x \leq a\} = \bigwedge \{x \in \mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L) \mid a \leq x\}$.

Dans tout treillis distributif profini L , les opérations suivantes sont bien définies.

$$x^\vee = \bigwedge \{y \in L \mid y \not\leq x\} \qquad x^\wedge = \bigvee \{y \in L \mid x \not\leq y\}$$

Proposition 2.4.9. *Soit x un élément d'une algèbre co-Heyting L pré-compacte et séparée. Les opérations $x \mapsto x^\vee$ et $x \mapsto x^\wedge$ sont bien définies,*

$$x \in \mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L) \Rightarrow x^\vee \in \mathcal{I}^{\vee\vee}(L) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathcal{I}^{\vee\vee}(L) \Rightarrow x^\wedge \in \mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L).$$

En outre, ces opérations sont des bijections croissantes réciproques entre $\mathcal{I}^{\vee\vee}(L)$ et $\mathcal{I}^{\wedge\wedge}(L)$.

2.4.2 L'algèbre co-Heyting libre à n générateurs

Dans cette section je note \mathcal{F}_n l'algèbre co-Heyting libre à n générateurs g_1, \dots, g_n . D'après la proposition 2.4.5, \mathcal{F}_n est pré-compacte et séparée.

[Bellissima, 1986] construit une chaîne croissante de modèles de Kripke $(\mathcal{K}_n^d)_{d \in \mathbb{N}}$ en n variables, ayant la propriété que tout modèle de Kripke fini en n variables, réduit et de hauteur⁶ $\leq d$, est un segment initial de \mathcal{K}_n^d . En outre \mathcal{K}_n^d est minimal pour cette propriété. Leur réunion \mathcal{K}_n hérite de cette propriété, uniformément pour tout $d \in \mathbb{N}$. Cette construction est assez complexe, je ne la reproduirai pas ici. Elle donne de \mathcal{F}_n une représentation particulière, dans laquelle son complété $\widehat{\mathcal{F}}$ apparaît comme l'algèbre co-Heyting des parties croissantes de \mathcal{K}_n . Cette représentation permet de démontrer par exemple certaines propriétés des éléments irréductibles de \mathcal{F}_n , telles que celles du théorème 2.4.8, mais fournit en plus dans ce cas particulier une expression (par récurrence, d'une complexité décourageante) de chaque élément irréductible en fonction des générateurs de \mathcal{F}_n .

Dans [Darnière et Junker, 2018] nous reprenons cette construction et l'utilisons, conjointement aux propriétés remarquables des éléments irréductibles de \mathcal{F}_n , pour démontrer le résultat suivant.

5. Pour les algèbres co-Heyting, cela revient à dire que pour tout terme $t(x)$ qui n'est pas identiquement nul sur au moins une algèbre de \mathcal{V} , il en existe au moins une finie sur laquelle il n'est pas identiquement nul, voir la section 2.1.3.

6. La hauteur d'un modèle de Kripke fini est la plus grande longueur possible d'une chaîne dans ce modèle.

Théorème 2.4.10. \mathcal{F}_n possède un unique système de n générateurs libres. Celui-ci est définissable (sans paramètre) dans \mathcal{F}_n .

Ceci permet de montrer que \mathcal{K}_n est interprétable dans \mathcal{F}_n comme suit.

— On prend comme ensemble de base $\mathcal{I}^{\wedge^1}(\mathcal{F}_n)$ muni de l'ordre induit par \mathcal{F}_n .

— Pour tout $x \in \mathcal{I}^{\wedge^1}(L)$ on pose $\text{val}(x) = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid g_i \leq x\}$.

$\mathcal{I}^{\wedge^1}(L)$ est définissable dans \mathcal{F}_n comme l'ensemble des éléments ayant un unique successeur. Il est beaucoup moins immédiat que l'application val ci-dessus est interprétable dans \mathcal{F}_n , mais c'est précisément ce que montre le théorème 2.4.10.

De cette construction on déduit plus ou moins directement les conséquences suivantes.

Corollaire 2.4.11. Le groupe d'automorphisme de \mathcal{F}_n , et aussi de $\widehat{\mathcal{F}}_n$, est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

Corollaire 2.4.12. \mathcal{F}_n est un modèle premier de sa théorie : toute algèbre co-Heyting élémentaire équivalente à \mathcal{F}_n en contient une copie. Aucune sous-algèbre stricte de \mathcal{F}_n dense dans \mathcal{F}_n n'est élémentairement équivalente à \mathcal{F}_n .

Corollaire 2.4.13. Si $\mathcal{F}_n \equiv \widehat{\mathcal{F}}_n$ alors $\mathcal{F}_n \preceq \widehat{\mathcal{F}}_n$.

2.4.3 Modèle-complétion

L'histoire de la modèle-complétion de la théorie des algèbres co-Heyting est assez tortueuse. Tout commence avec [Pitts, 1992] qui démontre que « le calcul propositionnel intuitionniste du second ordre est interprétable dans celui du premier ordre ». La méthode employée relève de la théorie de la preuve, avec calcul de séquents. [Ghilardi et Zawadowski, 1997] comprendront les premiers que le second ordre dont il est question ici correspond à une quantification sur les variables propositionnelles, et son interprétation dans le premier ordre à une élimination de ces quantificateurs.

Autrement dit [Pitts, 1992] construit en fait un algorithme d'élimination des quantificateurs pour les formules du premier ordre dans le langage des algèbres de Heyting. Il permet à [Ghilardi et Zawadowski, 1997] d'en déduire que la théorie des algèbres de heyting possède une modèle-complétion. En passant, ils étendent ce résultat à toutes les variétés d'algèbres de Heyting ayant la propriété d'amalgamation. Ces variétés sont au nombre huit. L'une est triviale, c'est la variété réduite à l'algèbre de Heyting \mathbf{L}_1 , qui n'a qu'un seul élément. Une autre d'entre elles est la variété des algèbres de Boole. Sa modèle-complétion était connue depuis longtemps (c'est la théorie des algèbres de Boole denses). Une fois l'ordre retourné, les six variétés d'algèbres co-Heyting restantes sont les suivantes.

- \mathcal{V}_1 est la variété de toutes les algèbres co-Heyting.
- $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 + [(\mathbf{1} - x) \wedge (\mathbf{1} - (\mathbf{1} - x)) = \mathbf{0}]$ correspond à la logique super-intuitionniste du tiers exclu faible ($\neg x \vee \neg \neg x = \mathbf{1}$).
- $\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 + [(((\mathbf{1} - x) \wedge x) - y) \wedge y = \mathbf{0}]$ est la variété engendrée par \mathbf{L}_3 (voir figure 2.1).
- $\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_1 + [(((\mathbf{1} - x) \wedge x) - y) \wedge y = \mathbf{0}]$ est la variété des algèbres co-Heyting de dimension ≤ 1 .
- $\mathcal{V}_5 = \mathcal{V}_4 + [(x - y) \wedge (y - x) \wedge (x \Delta (\mathbf{1} - y)) = \mathbf{0}]$ est la variété engendrée par \mathbf{L}_5 (voir figure 2.1).
- $\mathcal{V}_6 = \mathcal{V}_1 + [(x - y) \wedge (y - x) = \mathbf{0}]$ est la variété engendrée par les chaînes.



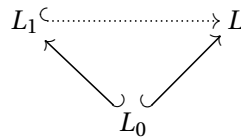
FIGURE 2.1 – Génératrices de \mathcal{V}_3 et \mathcal{V}_5 respectivement.

Pour explicite qu'elle soit, l'élimination des quantificateurs par Pitts n'est pas des plus éclairantes, et ne fournit pas une axiomatisation explicite de la modèle-complétion de la théorie des algèbres co-Heyting. Sa reformulation par [Ghilardi et Zawadowski, 1997] en termes d'algèbre universelle et de foncteurs adjoints ne nous renseigne pas davantage sur ce point.

Inspirés par les résultats des treillis échelonnés déjà présents dans [Darnière, 2004], pour chacune des variétés \mathcal{V}_i ci-dessus nous introduisons dans [Darnière et Junker, 2018] deux axiomes D_i et S_i , que je ne reproduis pas ici pour faire court, mais qui sont assez ressemblants aux axiomes de catéarité et de découpage qui axiomatisent la modèle-complétion des treillis échelonnés. En particulier S_1 est exactement l'axiome de découpage des treillis échelonnés (j'y reviens plus loin), et D_1 dit simplement que l'ordre fort est dense. Ces axiomes ont tous une signification topologico-géométrique immédiatement compréhensible. Les résultats suivants nous éclaire donc sur la nature des algèbres existentiellement closes de chacune des variétés \mathcal{V}_i .

Théorème 2.4.14. *Toute algèbre de Heyting existentiellement close dans \mathcal{V}_i satisfait D_i et S_i .*

Théorème 2.4.15. *Si une algèbre co-Heyting L de \mathcal{V}_i satisfait D_i et S_i alors, pour toute sous-algèbre finie L_0 de L et toute extension finie L_1 de L_0 , il existe un plongement de L_1 dans L au-dessus de L_0 .*



Corollaire 2.4.16. *Les théories de \mathcal{V}_3 à \mathcal{V}_6 admettent une modèle-complétion, axiomatisée par les axiomes D_i et S_i correspondants.*

Esquisse de démonstration. Le résultat découle directement des deux théorèmes précédents, car les variétés \mathcal{V}_3 à \mathcal{V}_6 sont localement finies. \square

Remarque 2.4.17. Pour \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 , qui ne sont pas localement finies, les théorèmes 2.4.14 et 2.4.15 ne suffisent malheureusement pas à obtenir une modèle-complétion. Toutefois, en admettant l'existence de cette modèle-complétion j'en ai récemment obtenu une axiomatisation basée sur D_1 et S_1 pour \mathcal{V}_1 , sur D_2 et S_2 pour \mathcal{V}_2 , et sur une propriété supplémentaire QE, plus technique, que je ne détaillerai pas ici (voir [Darnière, 2018]).

Notons que les théorèmes 2.4.14 et 2.4.15 sont indépendants de [Ghilardi et Zawadowski, 1997], et fournissent donc une nouvelle preuve de l'existence d'une modèle-complétion pour \mathcal{V}_3 à \mathcal{V}_6 , avec en prime une axiomatisation finie. Il est éclairant de se pencher sur leur démonstration pour voir comment ces axiomes D_i et S_i émergent naturellement de cette démarche, au moins dans le cas de \mathcal{V}_1 (les autres cas sont similaires).

Esquisse de démonstration (de 2.4.14 et 2.4.15.). L'objectif initial est de dégager des conditions suffisantes (ce seront les axiomes D_1 et S_1) sur une algèbre co-Heyting L pour que toute extension finie L_1 d'une sous-structure L_0 de L se plonge dans L au-dessus de L_0 . Par une récurrence immédiate, il suffit d'avoir cette propriété pour toute extension finie *minimale* de L_0 , ce qui ramène au cas où L_1 en est une. Une étude *ad hoc* d'une telle extension minimale montre qu'elles ne peuvent être que de deux sortes.

Type (D) Tout élément \vee -irréductible de L_0 reste \vee -irréductible dans L_1 , et L_1 possède exactement un élément \vee -irréductible supplémentaire, notons-le x . Dans ce cas $g := \min\{a \in L_0 \mid g \leq a\}$ est \vee -irréductible dans L_0 , de prédécesseur g^- ; de plus $g^- \wedge x \in L_0$ et $g^- \wedge x \ll x \ll g$.

Type (S) Tout élément \vee -irréductible de L_0 reste \vee -irréductible dans L_1 sauf un, notons-le g . Dans ce cas L_1 possède exactement deux nouveaux éléments \vee -irréductibles x_1 et x_2 . Ceux-ci vérifient $x_1 = g - x_2$ et $x_2 = g - x_1$, mais aussi $g^- \wedge x_1 \in L_0$ et $g^- \wedge x_2 \in L_0$.

Si L_1 est une extension de type (S), pour la plonger dans L au-dessus de L_0 , on montre qu'il suffit de trouver deux éléments $y_1, y_2 \in L \setminus \{0\}$ qui découpent g le long de $g^- \wedge x_1$ et $g^- \wedge x_2$ (voir théorème 2.3.5), et d'envoyer x_1 et x_2 sur y_1 et y_2 . Pour une extension de type (D) c'est à peine plus compliqué, mais il suffit essentiellement de trouver un élément $y \in L$ tel que $g^- \wedge x \ll y \ll g$. En résumé, l'étude des extensions finies minimales d'une algèbre co-Heyting montre qu'il suffit, pour que la conclusion du théorème 2.4.15 soit valide, que L satisfasse les deux conditions suivantes.

(D₁) Pour tous $a, c \in L$, si $c \ll a \neq 0$ il existe $b \in L \setminus \{0\}$ tel que $c \ll b \ll a$ (autrement dit l'ordre fort est dense dans $L \setminus \{0\}$).

(S₁) Pour tous $a, b_1, b_2 \in L$, si $b_1 \vee b_2 \ll a \neq 0$ il existe des éléments a_1 et a_2 dans $L \setminus \{0\}$, tels que

$$\begin{cases} a_1 = a - a_2 \geq b_1 \\ a_2 = a - a_1 \geq b_2 \\ a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 \end{cases}$$

Ces deux axiomes maintenant dégagés, le théorème 2.4.15 est prouvé. Pour démontrer le théorème 2.4.14, il reste à vérifier que toute algèbre de Heyting existentiellement close les satisfait.

Pour S_1 en particulier, on peut donner une idée de la preuve par un argument géométrique. Un artifice de théorie des modèles, fondé sur la propriété 2.1.7 du modèle fini, ramène tout d'abord à la situation suivante : trois éléments a, b_1, b_2 sont donnés dans une algèbre co-Heyting finie L_0 tels que $b_1 \vee b_2 \ll a \neq 0$, et on cherche dans une extension de L_0 deux éléments a_1 et a_2 qui découpent a le long de b_1 et b_2 .

Comme L_0 est finie, d'après le théorème 2.3.3 de représentation linéaire des treillis sous-échelonnés⁷ elle se plonge dans le treillis échelonné $L(X)$ des sous-espaces semi-affines d'un espace semi-affine $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par ce plongement a, b_1, b_2 s'envoient sur des espaces semi-affines $A, B_1, B_2 \subseteq X$. On construit alors une extension de $L(X)$ comme suit.

Soient $X_1 = X \setminus (B_2 \setminus B_1)$ et $X_2 = X \setminus (B_1 \setminus B_2)$. On les recolle le long de $B_1 \cap B_2$ en un seul ensemble semi-algébrique réel X' . Les injections de X_1 et X_2 dans X induisent alors une projection $\pi : X' \rightarrow X$ (voir figure 2.2). On vérifie sans peine que l'application $\sigma(C) = \pi^{-1}(C)$ définit alors un plongement de $L(X)$ dans l'algèbre co-Heyting $L(X')$ des parties semi-algébriques fermées dans X' .

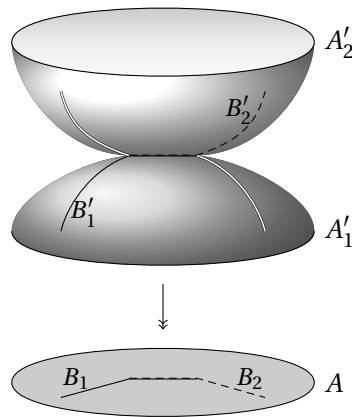


FIGURE 2.2 – Quand $A = X$, recollement de $X_1 = A'_1$ et $X_2 = A'_2$, et projection sur A .

Notons A', B'_1, B'_2 les images de A, B_1, B_2 dans $L(X')$ (autrement dit leurs pré-images par π dans X'), et posons $A'_1 = A' \cap X_1$ et $A'_2 = A' \cap X_2$. On vérifie facilement que A'_1 et A'_2 découpent A' précisément le long de B'_1 et B'_2 . $L(X')$ est donc l'extension de L_0 cherchée. \square

7. Ici L_0 n'est qu'une algèbre co-Heyting, pas un treillis sous-échelonné, mais comme elle est finie, elle est *a fortiori* de dimension finie d . Elle admet donc une unique structure de treillis d -échelonné (voir remarque 2.3.1). Le théorème 2.3.3 s'applique alors à cette structure enrichie.

Annexes

1 Topologie

Pour toute partie A d'un espace topologique X , on note \overline{A} l'**adhérence** de A et $\partial A = \overline{A} \setminus A$ la **frontière** de A dans X . Une fonction f à valeurs dans un espace topologique Y sera dite **largement continue** sur A si elle est définie au moins sur A et si sa restriction à A se prolonge en une fonction continue de \overline{A} dans Y .

L'**ordre fort** sur les parties de X est défini par

$$B \ll A \iff B \subseteq \overline{A \setminus B} \cap A.$$

Autrement dit $B \ll A$ si B est une partie de A d'intérieur vide dans A .

Le préordre de **spécialisation** est défini sur l'ensemble des parties de X par

$$B \leq A \iff B \subseteq \overline{A}.$$

Sur le treillis des fermés de X , ce préordre est un ordre.

Les complexes considérés dans ce mémoire sont tous finis. Nous appellerons **complexe fermé** dans X toute famille \mathcal{A} de parties A de X , deux à deux disjointes, telles que :

- A est **relativement ouvert**, autrement dit $\overline{A} \setminus A$ est fermé;
- \overline{A} est la réunion des $B \leq A$ dans \mathcal{A} .

Un **complexe** dans X sera un sous-ensemble \mathcal{E} d'un complexe fermé \mathcal{A} dans X tel que pour tous $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \mathcal{E}$ est la réunion des $F \in \mathcal{E}$ tels que $F \leq E_1$ et $F \leq E_2$.

Dans tous les complexes considérés ici, le pré-ordre de spécialisation est un ordre. Dans le cas particulier où \mathcal{A} est un sous-ensemble d'un complexe fermé qui, ordonné par spécialisation, est une réunion finie d'arbres enracinés, nous dirons que \mathcal{A} est un **monoplexe**.

Exemple. L'ensemble \mathcal{A} des faces propres d'un polytope A , que celui-ci réel, discret ou p -adique, forment un complexe. Dans le cas discret ou p -adique ce complexe est un arbre enraciné (proposition 1.2.3). Enfin si A un simplexe discret ou p -adique alors \mathcal{A} est une chaîne, donc un cas particulier de monoplexe.

Si un complexe est formé de simplexes (en quelque sens que ce soit : réels, discrets ou p -adiques), nous parlerons de **complexe simplicial**. Notons que complexes simpliciaux discrets ou p -adiques sont tous des monoplexes. Par extension, les familles finies de complexes simpliciaux (au sens ci-dessus) seront elles aussi appelées des complexes simpliciaux (voir section 1.3).

Les complexes cellulaire, en revanche, ne sont pas simplement des complexes formés de cellules : on impose des conditions techniques supplémentaires sur les cellules d'un tel complexe, détaillées dans la section 1.3.2.

2 Logique et langage

Un **langage** est un ensemble \mathcal{L} de symboles de constantes, de fonctions ou de relations (en un nombre fini de variables, appelé « arité » du symbole). Les **termes** du langage \mathcal{L} s'obtiennent par

combinaison de ces symboles de constantes et de fonctions avec des symboles de variables, en respectant leurs arités. Par exemple si c est un symbole de constante, f et g deux symboles de fonctions binaires, alors $f(x, g(y, f(c, z)))$ est un terme de \mathcal{L} en trois variables x , y et z .

Parmi les langages utilisés dans ce mémoire, on peut citer le langage des anneaux $\mathcal{L}_{\text{ann}} = \{0, 1, +, -, \times\}$ ou celui des treillis $\mathcal{L}_{\text{lat}} = \{0, 1, \vee, \wedge\}$.

Les **formules atomiques** dans le langage \mathcal{L} sont les équations entre termes $t_1 = t_2$, et les expressions du type $R(t_1, \dots, t_k)$ où les t_i sont des termes et R un symbole de relation k -aire. On construit les **formules (du 1^{er} ordre)** de \mathcal{L} en combinant les formules atomiques et les constantes logiques \top et \perp (resp. « vrai » et « faux ») à l'aide des connecteurs logiques (et, ou, négation) et des quantificateurs⁸ *limités aux variables*: on écrit « $\exists x$ » ou « $\forall x$ », jamais⁹ « $\exists x \in \mathbb{R}$ » ou « $\forall x \in \mathbb{N}$ ». Les variables non quantifiées d'une formule sont appelées ses **variables libres**. Une formule **existentielle** (resp. **universelle**) est une formule commençant par une succession de quantificateurs \exists (resp. \forall) suivie d'une formule sans quanteur. Enfin une formule dans laquelle certaines des variables libres ont été remplacées par des éléments pris dans un ensemble A est dite **à paramètre dans** A . Dans le cas contraire elle est dite **sans paramètre**.

Une \mathcal{L} -**structure** est un ensemble \mathcal{M} muni d'une interprétation de chaque symbole de \mathcal{L} : une valeur dans \mathcal{M} pour chaque symbole de constante, une fonction de \mathcal{M}^k dans \mathcal{M} pour chaque symbole de fonction k -aire, et une partie de \mathcal{M}^k pour chaque symbole de relation k -aire. Toute formule $\varphi(x)$ en k variables libres énonce une propriété portant sur ses variables libres. La formule est **satisfaite** (ou « vraie ») en un point $a \in \mathcal{M}^k$ si a possède cette propriété dans \mathcal{M} , ce qu'on note $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.

Exemple. La formule $\varphi(x) = \langle \forall y, x + y = y + x \rangle$ est une formule universelle du langage $\mathcal{L} = \{+\}$, sans paramètre, en une variable libre. Une \mathcal{L} -structure $\mathcal{M} = (M, +)$ est un ensemble M muni d'une loi de composition interne interprétant le symbole $+$ (et on utilise bien sûr le même symbole $+$ pour désigner cette loi de composition interne sur M). La formule $\varphi(x)$ énonce que x commute avec tout y pour $+$. Elle est donc satisfaite par un élément $a \in M$ si et seulement si a commute en effet avec tout élément de M pour la loi $+$ de M .

Un **ensemble définissable** est une partie A de \mathcal{M}^k pour laquelle il existe une formule $\varphi(x)$ en k variables libres (éventuellement à paramètres dans \mathcal{M}) telle que

$$A = \{a \in \mathcal{M}^k \mid \mathcal{M} \models \varphi(a)\}.$$

De même une **fonction définissable** est une fonction $f : A \subseteq \mathcal{M}^k \rightarrow \mathcal{M}^l$ dont le graphe est définissable. Si l'ensemble des éléments de \mathcal{M}^k satisfaisant une propriété donnée est définissable, on dit que cette propriété est **élémentaire** ou **du 1^{er} ordre**. Autrement dit une propriété est élémentaire s'il existe une formule $\varphi(x)$ du premier ordre, telle que $a \in \mathcal{M}^k$ possède cette propriété si et seulement si $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.

Les ensembles de formules s'appellent des **théories**. Une théorie T est **consistante** si elle n'entraîne pas contradiction logique, autrement dit si on ne peut pas en déduire \perp par les règles de déduction de la logique classique. Elle est **décidable** s'il existe un algorithme permettant de décider, pour toute formule de \mathcal{L} , si elle est ou non conséquence de T . Elle est **complète** si elle est consistante et si pour toute formule φ de \mathcal{L} , ou bien φ ou bien sa négation est conséquence de T .

Un **modèle** d'une théorie T dans un langage \mathcal{L} est une \mathcal{L} -structure qui satisfait toutes les formules de T . Inversement, l'ensemble des formules (resp. des formules universelles, resp. existentielles) satisfaites dans une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} s'appelle la **théorie complète** (resp. **universelle**, resp. **existentielle**) de \mathcal{M} . Notons que la théorie complète de n'importe quelle \mathcal{L} -structure \mathcal{M} est complète (sic), parce que la propriété énoncée par une formule φ quelconque est soit vraie soit fausse dans \mathcal{M} .

8. Les quantificateurs \exists, \forall sont aussi appelés des **quanteurs**.

9. On peut toutefois écrire par abus de notation $\exists x \in A$ ou $\forall x \in A$ si A est un ensemble définissable (voir plus loin).

Enfin une classe Σ de \mathcal{L} -structures est **élémentaire** si c'est exactement la classe des modèles d'une théorie T . La « théorie des modèles » est l'étude des relations entre les théories et leurs modèles. L'un de ses résultats fondamentaux est le suivant.

Théorème (de complétude). *Une théorie du premier ordre possède un modèle si et seulement si elle est consistante.*

En général on ne distingue pas une théorie T de l'ensemble $C(T)$ de ses conséquences logiques. Néanmoins on dit qu'un ensemble T_0 de formules **axiomatise** une théorie T si $C(T_0) = C(T)$. Par le théorème de complétude il revient au même de dire que T et T_0 ont les mêmes modèles. L'un des intérêts de connaître une bonne axiomatisation d'une théorie complète réside dans la propriété suivante.

Proposition. *Une théorie complète est décidable si et seulement si on peut l'axiomatiser par un ensemble de formules récursivement énumérable.*

Deux structures \mathcal{M}, \mathcal{N} sont dites **élémentairement équivalentes** si elles ont la même théorie. On le note $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Exemple. Deux corps algébriquement clos sont élémentairement équivalents si et seulement s'ils ont la même caractéristique. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée est donc complète. Comme les axiomes naturels de cette théorie sont récursivement énumérable, elle est décidable.

Exemple. Un corps est réel-clos (resp. p -adiquement clos, voir section 1.1.1) si et seulement s'il est élémentairement équivalent à \mathbb{R} (resp. à une extension finie de \mathbb{Q}_p).

Si une partie \mathcal{N} d'une \mathcal{L} -structure \mathcal{M} contient les différents points de M qui interprètent les constantes du langage \mathcal{L} , et si $f(\mathcal{N}^k) \subseteq \mathcal{N}$ pour tout symbole f de fonction k -aire de \mathcal{L} , alors \mathcal{M} induit (par restriction des fonctions et des relations interprétant les symboles de \mathcal{L}) une \mathcal{L} -structure sur \mathcal{N} . On appelle **\mathcal{L} -sous-structure** de \mathcal{M} toutes les structures de cette sorte. Inversement, \mathcal{M} est une **\mathcal{L} -extension** de ses \mathcal{L} -sous-structures.

Une théorie T est **universelle** si elle satisfait l'une des deux conditions équivalentes suivantes.

- Toute sous-structure d'un modèle de T est encore un modèle de T .
- T peut être axiomatisée par des formules universelles.

Un \mathcal{L} -plongement est une application injective $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ entre deux \mathcal{L} -structures, qui préserve leurs structures en un sens plus ou moins évident : par exemple si $f \in \mathcal{L}$ est un symbole de fonction binaire, $\varphi(f(a, b)) = f(\varphi(a), \varphi(b))$ pour tous $a, b \in \mathcal{N}$. En général on identifie alors \mathcal{N} à son image par \mathcal{M} en disant que le plongement φ fait de \mathcal{N} une sous-structure de \mathcal{M} , ou de \mathcal{M} une extension de \mathcal{N} .

Une théorie T a la **propriété d'amalgamation** si, étant donnés deux plongements quelconques $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}_2$ entre modèles de T , il existe des plongements $\mathcal{M}_1 \hookrightarrow \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_2 \hookrightarrow \mathcal{M}$ entre modèles de T tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2 & \hookrightarrow & \mathcal{M} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{N} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_1 \end{array}$$

Une \mathcal{L} -structure \mathcal{N} est **existentiellement close** relativement à une classe Σ de \mathcal{L} -structure si, pour toute extension \mathcal{M} de \mathcal{N} prise dans Σ , \mathcal{N} et \mathcal{M} satisfont les mêmes formules existentielles (à paramètres dans \mathcal{N}). On le note $\mathcal{N} \leq_{\exists} \mathcal{M}$. Autrement dit $\mathcal{N} \leq_{\exists} \mathcal{M}$ si, pour toute formule sans quanteur $\varphi(x)$ en k variables libres à paramètres dans \mathcal{N} (par exemple un système d'équations), s'il existe un k -uplet a dans \mathcal{M}^k ayant la propriété $\varphi(a)$ (par exemple une solution de ce système) alors il en existe déjà un dans \mathcal{N}^k . Un **modèle existentiellement clos** d'une théorie T est un modèle de T existentiellement clos relativement à la classe de tous les modèles de T .

Exemple. Les corps algébriquement clos (resp. réel clos) sont les modèles existentiellement clos de la théorie des corps (resp. des corps ordonnés) dans le langage des anneaux \mathcal{L}_{ann} (resp. des anneaux ordonnés $\mathcal{L}_{\text{ann}} \cup \{\leq\}$).

Une **extension élémentaire** de \mathcal{N} est une extension \mathcal{M} de \mathcal{N} qui satisfait les mêmes formules (à paramètres dans \mathcal{N}). On le note $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$. Une théorie T est **modèle-complète** si tout plongement entre deux modèles de T est élémentaire.

Exemple. Soit T une théorie quelconque. Supposons que la classe Σ des modèles existentiellement clos de T soit élémentaire. Alors on peut montrer que la théorie de Σ est modèle-complète.

Une théorie T^* est le **modèle-compagnon** d'une théorie T si les modèles de T^* sont exactement les modèles existentiellement clos de T . Si de plus T a la propriété d'amalgamation, on dit que T^* est la **modèle-complétion** de T .

Exemple. La théorie des corps algébriquement clos (resp. réel clos) est la modèle-complétion, dans le langage des anneaux (resp. des anneaux ordonnés) de la théorie des corps (resp. des corps ordonnés).

Une théorie T **élimine les quantificateurs** si toute formule du langage de T est logiquement équivalente modulo T à une formule sans quantificateur.

Proposition. *Une théorie T universelle admet une modèle-complétion T^* si et seulement si T^* est un modèle-compagnon de T et si T^* élimine les quantificateurs.*

Index

- $B(c, r)$, 6
- $J(A_0)$, 33
- K , 6
- $L(X)$, 34
- $\llbracket 1, m \rrbracket$, 6
- Γ , 9
- $L_{\text{rad}}(A)$, 33
- Ω , 10
- $\text{Spec}^\dagger L$, 35
- $\text{Specmax } A$, 33
- \equiv , 51
- \models , 37, 50
- \overline{A} , 49
- ∂A , 49
- π_I , 6, 28
- \preceq , 52
- \triangleleft^n -raffinement, 17
- \triangleleft^n -transition, 17
- d -basique, 31
- k -pureté, 41
- p -adiquement clos, 5
- p -optimale, 31
- p -minimale, 28
- u_η , 16
- v , 6
- \mathcal{B} , 38
- $\mathcal{C}(X)$, 38
- $\mathcal{C}(X, Y)$, 38
- $\mathcal{C}(f)$, 29
- $\mathcal{C}_{p_0}(X, Y)$, 38
- \mathcal{F}_n , 45
- \mathcal{K}_n , 45
- $\mathcal{L}_{\text{éch}}$, 41
- $\mathcal{L}_{\text{éch}}^{\text{At}}$, 43
- \mathcal{L}_{ann} , 38, 50
- \mathcal{L}_{lat} , 41, 50
- \mathcal{O} , 38
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, 24
- \mathcal{Q} , 10
- \mathcal{Z} , 6
- \mathbb{Z} -groupe, 5
- adhérence \overline{A} , 49
- algèbre co-Heyting, 36
- algèbre de Heyting, 36
- cellule
 - ajustée, 7
 - définissable, 31
 - de type 0 ou 1, 7
 - largement continue, 7
 - modulo \mathbb{G} , 6
 - présentée, 6
 - semi-algébrique, 6
 - sous-jacente à une cellule présentée, 7
 - t-cellule, 29
 - topologique, 29
- classe élémentaire, 51
- co-dimension, 36
- complexe
 - cellulaire, 18
 - cellulaire fermé, 18
 - fermé, 49
 - général, 49
 - simplicial, 49
 - simplicial p -adique, 13
- décomposition t-cellulaire, 29
- découpage (de a le long de b_1 et b_2), 42
- définissable
 - ensemble, 50
 - fonction, 50
- dimension, 28, 36
 - pure, 30, 41
- dimension locale, 29, 40
- direction
 - bonne, 16
 - géométriquement bonne, 16
- équivalence élémentaire, 51
- extension
 - élémentaire, 52
 - d'une structure, 51
- face
 - d'un polytope p -adique, 13
 - d'une partie de Γ^m , 9
- fonction
 - N -monomiale, 14

- N -monomiale modulo $U_{e,n}$, 14
- Ω -affine, 10
- largement continue, 49
- presque largement continue, 16
- formule
 - du 1^{er} ordre, 50
 - existentielle, 50
 - sans paramètre, 50
 - universelle, 50
- frontière $\partial A = \overline{A} \setminus A$, 49
- groupe des inversibles A^\times , 7
- indice
 - d'un complexe simplicial, 13
 - d'un polytope, 13
- langage, 49
- largement continue
 - cellule, 7
 - fonction, 49
- modèle
 - existentiellement clos, 51
- modèle (d'une théorie), 50
- modèle de Kripke
 - général, 37
 - réduit, 38
- modèle-compagnon, 52
- modèle-complétion, 52
- monomialisation, 15
- monoplexe, 49
- monoplexe cellulaire, 18
- ordre fort
 - dans un espace topologique, 49
 - dans un treillis distributif, 36
- P -minimale, 28
- paramètres (n, N, e, M) , 15
- polytope
 - p -adique, 13
 - discret, 10
- présentation d'un polytope discret, 10
- propriété élémentaire (du 1^{er} ordre), 50
- propriété d'amalgamation, 51
- pseudo-faces, 18
- quanteurs, 50
- quasiment p -optimal, 31
- radiale (fonction), 39
- radiante (partie), 39
- relativement ouvert, 49
- satisfaction d'une formule, 50
- semi-algébrique
 - ensemble, 4
 - fonction, 5
 - généralisé (corps valué), 5
- simplexe
 - p -adique, 13
 - discret, 12
- socle \hat{A} , 6, 9
- sous-structure, 51
- spécialisation, 49
- structure, 50
 - élémentairement équivalente à une autre, 51
 - existentiellement close, 51
- support, 6, 9
- système complet de \triangleleft^n -transitions, 17
- terme (d'un langage), 49
- théorie
 - éliminant les quantificateurs, 52
 - axiomatisation, 51
 - complète, 50
 - consistante, 50
 - d'une structure, 50
 - décidable, 50
 - du 1^{er} ordre, 50
 - modèle-complète, 52
 - universelle, 51
- treillis
 - échelonné, 41
 - échelonné atomique, 43
 - sous-échelonné, 41
 - distributif, 35
 - général, 35
 - géométrique, 40
 - localement complémenté, 35
 - noethérien, 40
 - opposé, 36
 - résiduel d'un anneau, 33
 - super-échelonné, 42
 - super-échelonné atomique, 43
 - topologiquement complémenté, 35
- triangulation p -adique, 15
- uniformisante, 6
- variables libres, 50

Bibliographie

- [Astier, 2013] ASTIER, V. (2013). Elementary equivalence of lattices of open sets definable in o-minimal expansions of real closed fields. *Fund. Math.*, 220(1):7–21.
- [Bélair, 2012] BÉLAIR, L. (2012). Panorama of p -adic model theory. *Ann. Sci. Math. Québec*, 36(1):43–75 (2013).
- [Bellissima, 1986] BELLISSIMA, F. (1986). Finitely generated free Heyting algebras. *J. Symbolic Logic*, 51(1):152–165.
- [Bochnak *et al.*, 1998] BOCHNAK, J., COSTE, M. et ROY, M.-F. (1998). *Real algebraic geometry*, volume 36 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Brøndsted, 1983] BRØNDSTED, A. (1983). *An introduction to convex polytopes*, volume 90 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [Cluckers, 2001] CLUCKERS, R. (2001). Classification of semi-algebraic p -adic sets up to semi-algebraic bijection. *J. Reine Angew. Math.*, 540:105–114.
- [Cluckers, 2003] CLUCKERS, R. (2003). Presburger sets and P -minimal fields. *J. Symbolic Logic*, 68(1):153–162.
- [Cluckers, 2004] CLUCKERS, R. (2004). Analytic p -adic cell decomposition and integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(4):1489–1499.
- [Cluckers *et al.*, 2012] CLUCKERS, R., COMTE, G. et LOESER, F. (2012). Local metric properties and regular stratifications of p -adic definable sets. *Comment. Math. Helv.*, 87(4):963–1009.
- [Cluckers et Leenknecht, 2012] CLUCKERS, R. et LEENKNEGT, E. (2012). A version of p -adic minimality. *J. Symbolic Logic*, 77(2):621–630.
- [Cluckers et Martin, 2018] CLUCKERS, R. et MARTIN, F. (2018). A definable p -adic analogue of Kirsbraun’s theorem on extensions of Lipschitz maps. *J. Inst. Math. Jussieu*, 17(1):39–57.
- [Cubides-Kovacsics *et al.*, 2017] CUBIDES-KOVACSICS, P., DARNIÈRE, L. et LEENKNEGT, E. (2017). Topological cell decomposition and dimension theory in p -minimal fields. *J. Symb. Log.*, 82(1):347–358.
- [Cubides-Kovacsics et Leenknecht, 2016] CUBIDES-KOVACSICS, P. et LEENKNEGT, E. (2016). Integration and cell decomposition in P -minimal structures. *J. Symb. Log.*, 81(3):1124–1141.
- [Cubides Kovacsics et Nguyen, 2017] CUBIDES KOVACSICS, P. et NGUYEN, K. H. (2017). A P -minimal structure without definable Skolem functions. *J. Symb. Log.*, 82(2):778–786.
- [Darnière, 2004] DARNIÈRE, L. (2004). Model-completion of scaled lattices. *Prépublications mathématiques d’Angers* 191, Département de mathématiques de l’université d’Angers (France).
- [Darnière, 2017] DARNIÈRE, L. (2017). Polytopes and simplexes in p -adic fields. *Ann. Pure Appl. Logic*, 168(6):1284–1307.
- [Darnière, 2018] DARNIÈRE, L. (2018). On the model-completion of heyting algebras. arXiv :1810.01704.
- [Darnière, 2019a] DARNIÈRE, L. (2019a). Model completion of scaled lattices and co-heyting algebras of p -adic semi-algebraic sets. *Math. Logic Quart.* (to appear).

- [Darnière, 2019b] DARNIÈRE, L. (2019b). Semi-algebraic triangulation over p -adically closed fields. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 118(6):1501–1546.
- [Darnière et Halpuczok, 2017] DARNIÈRE, L. et HALPUCZOK, I. (2017). Cell decomposition and classification of definable sets in p -optimal fields. *J. Symb. Log.*, 82(1):120–136.
- [Darnière et Junker, 2010] DARNIÈRE, L. et JUNKER, M. (2010). On Bellissima’s construction of the finitely generated free Heyting algebras, and beyond. *Arch. Math. Logic*, 49(7-8):743–771.
- [Darnière et Junker, 2011] DARNIÈRE, L. et JUNKER, M. (2011). Codimension and pseudometric in co-Heyting algebras. *Algebra Universalis*, 64(3):251–282.
- [Darnière et Junker, 2018] DARNIÈRE, L. et JUNKER, M. (2018). Model completion of varieties of co-Heyting algebras. *Houston J. Math.*, 44(1):49–82.
- [Darnière et Tressl, 2019] DARNIÈRE, L. et TRESSL, M. (2019). Defining integer valued functions in rings of continuous definable functions over a topological field. *J. Math. Log. (to appear)*.
- [Denef, 1984] DENEFF, J. (1984). The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety. *Invent. Math.*, 77(1):1–23.
- [Denef, 1986] DENEFF, J. (1986). p -adic semi-algebraic sets and cell decomposition. *J. Reine Angew. Math.*, 369:154–166.
- [Denef et van den Dries, 1988] DENEFF, J. et van den DRIES, L. (1988). p -adic and real subanalytic sets. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):79–138.
- [Fehm et Jahnke, 2017] FEHM, A. et JAHNKE, E. (2017). Recent progress on definability of Henselian valuations. In *Ordered algebraic structures and related topics*, volume 697 de *Contemp. Math.*, pages 135–143. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [Ghilardi et Zawadowski, 1997] GHILARDI, S. et ZAWADOWSKI, M. (1997). Model completions and r -Heyting categories. *Ann. Pure Appl. Logic*, 88(1):27–46.
- [Green *et al.*, 1995] GREEN, B., POP, F. et ROQUETTE, P. (1995). On Rumely’s local-global principle. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 97(2):43–74.
- [Grzegorzczak, 1951] GRZEGORCZYK, A. (1951). Undecidability of some topological theories. *Fund. Math.*, 38:137–152.
- [Halpuczok, 2014] HALPUCZOK, I. (2014). Non-Archimedean Whitney stratifications. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 109(5):1304–1362.
- [Haskell et Macpherson, 1994] HASKELL, D. et MACPHERSON, D. (1994). Cell decompositions of C -minimal structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 66(2):113–162.
- [Haskell et Macpherson, 1997] HASKELL, D. et MACPHERSON, D. (1997). A version of o -minimality for the p -adics. *J. Symbolic Logic*, 62(4):1075–1092.
- [Hochster, 1969] HOCHSTER, M. (1969). Prime ideal structure in commutative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142:43–60.
- [Hosoi, 1967] HOSOI, T. (1967). On intermediate logics. I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 14:293–312.
- [Jahnke *et al.*, 2017] JAHNKE, E., SIMON, P. et WALSBURG, E. (2017). Dp -minimal valued fields. *J. Symb. Log.*, 82(1):151–165.
- [Macintyre, 1976] MACINTYRE, A. (1976). On definable subsets of p -adic fields. *J. Symbolic Logic*, 41(3):605–610.
- [Mathews, 1995] MATHEWS, L. (1995). Cell decomposition and dimension functions in first-order topological structures. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 70(1):1–32.
- [Moret-Bailly, 1989] MORET-BAILLY, L. (1989). Groupes de Picard et problèmes de Skolem. I, II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 22(2):161–179, 181–194.
- [Mourgues, 2000] MOURGUES, M.-H. (1999-2000). Corps p -minimaux avec fonctions de skolem définissables. Prépublications de l’équipe de logique de paris 7, Séminaire de structures algébriques ordonnées.

- [Mourgues, 2009] MOURGUES, M.-H. (2009). Cell decomposition for P -minimal fields. *MLQ Math. Log. Q.*, 55(5):487–492.
- [Pitts, 1992] PITTS, A. M. (1992). On an interpretation of second-order quantification in first-order intuitionistic propositional logic. *J. Symbolic Logic*, 57(1):33–52.
- [Prestel et Roquette, 1984] PRESTEL, A. et ROQUETTE, P. (1984). *Formally p -adic fields*, volume 1050 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag.
- [Prestel et Schmid, 1990] PRESTEL, A. et SCHMID, J. (1990). Existentially closed domains with radical relations. *J. Reine Angew. Math.*, 407:178–201.
- [Richard, 1989] RICHARD, D. (1989). Definability in terms of the successor function and the coprimeness predicate in the set of arbitrary integers. *J. Symbolic Logic*, 54(4):1253–1287.
- [Rumely, 1986] RUMELY, R. S. (1986). Arithmetic over the ring of all algebraic integers. *J. Reine Angew. Math.*, 368:127–133.
- [Scowcroft et van den Dries, 1988] SCOWCROFT, P. et van den DRIES, L. (1988). On the structure of semialgebraic sets over p -adic fields. *J. Symbolic Logic*, 53(4):1138–1164.
- [Simon, 2011] SIMON, P. (2011). On dp-minimal ordered structures. *J. Symbolic Logic*, 76(2):448–460.
- [Simon et Walsberg, 2018] SIMON, P. et WALSBERG, E. (2018). Tame topology over dp-minimal structures. *Notre Dame J. of Formal Logic*.
- [Tressl, 2017] TRESSL, M. (2017). On the strength of some topological lattices. *Contemp. Math.*
- [van den Dries, 1988] van den DRIES, L. (1988). Elimination theory for the ring of algebraic integers. *J. Reine Angew. Math.*, 388:189–205.
- [van den Dries, 1989] van den DRIES, L. (1989). Dimension of definable sets, algebraic boundedness and Henselian fields. *Ann. Pure Appl. Logic*, 45(2):189–209. Stability in model theory, II (Trento, 1987).
- [van den Dries, 1998] van den DRIES, L. (1998). *Tame topology and o -minimal structures*, volume 248 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge.