



**HAL**  
open science

# Le contrôle supervisé des automates d'intervalles

Jan Komenda, Sébastien Lahaye

► **To cite this version:**

Jan Komenda, Sébastien Lahaye. Le contrôle supervisé des automates d'intervalles. Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR'23), Nov 2023, Toulouse, France. hal-04419160

**HAL Id: hal-04419160**

**<https://univ-angers.hal.science/hal-04419160>**

Submitted on 26 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le contrôle supervisé des automates d'intervalles

Jan Komenda<sup>1</sup> et Sébastien Lahaye<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Inst. de Mathématiques, Ac.Sci. Tchèque Žitná 25, 115 67 Prague, Rép. Tchèque  
komenda@ipm.cz

<sup>2</sup> Univ Angers, LARIS, SFR MATHSTIC, F-49000 Angers, France  
sebastien.lahaye@univ-angers.fr

## Abstract

In this paper we extend supervisory control of  $(\max,+)$  automata to automata with multiplicities in an interval semiring. The controller restricts the behavior of the system in the optimal way. More precisely, we propose maximally permissive (least restrictive) supervisors to guarantee the specified time windows for executing events, which can also be disabled. Composition of system with its controller is defined based on tensor product of their linear representations. The behavior of the closed-loop system corresponds to a generalized version Hadamard product of formal power series of the system and the controller, where occurrences of uncontrollable events can neither be forbidden nor delayed.

**Résumé.** Dans cet article on étend le contrôle supervisé des automates  $(\max,+)$  aux automates à multiplicités dans un semi-anneau d'intervalles. L'action du superviseur vise à restreindre le comportement du système de façon optimale. Plus précisément, on propose des superviseurs les plus permissifs (les moins contraignants) pour garantir des intervalles spécifiés d'exécution des événements, en incluant la possibilité de supprimer des occurrences. On définit la composition du système avec son contrôleur à l'aide du produit tensoriel de leurs représentations linéaires dans un semi-anneau d'intervalles. Le comportement du système contrôlé correspond à une version généralisée du produit d'Hadamard des séries formelles du système et du contrôleur où les occurrences des événements incontrôlables ne peuvent être ni interdites, ni restreintes.

## 1 Introduction

La théorie du contrôle supervisé des systèmes à événements discrets a été introduite par Ramadge et Wonham [15] en s'intéressant uniquement à des aspects logiques. Le besoin de considérer des contraintes temporelles a conduit à l'extension de ces techniques aux systèmes temporisés notamment dans [5]. On peut aussi retenir une extension aux systèmes temps-réel, basée sur des abstractions d'automates temporisés en automates booléens (logiques), appelés également automates des régions et la formulation basée sur la théorie des jeux [2]. Une classe de systèmes à événements discrets temporisés peut être étudiée à l'aide des automates  $(\max,+)$  [8] qui sont à même de modéliser tout réseau de Petri temporisé sauf. Leurs propriétés sont présentées dans [8] et [9]. Ils généralisent à la fois les automates logiques et les systèmes  $(\max,+)$ -linéaires. Notons que les multiplicités peuvent avoir différentes interprétations : celle d'un coût pour des automates  $(\min,+)$ , et le plus souvent elles représentent le temps dans le cas  $(\max,+)$ . Dans les réseaux de Petri temporels et les automates temporisés, les temporisations sont non déterministes, et pour étudier une classe similaire à l'aide d'automates à multiplicités, il est naturel de considérer que les pondérations appartiennent à un semi-anneau d'intervalles.

Une théorie du contrôle des automates  $(\max,+)$  a été développée dans [10]. Elle repose sur la composition parallèle du contrôleur avec le système, les deux étant modélisés par des automates  $(\max,+)$ . Cette composition spécifie l'interaction du contrôleur avec le système, notamment en présence d'événements incontrôlables. En termes de comportement (série formelle),

la composition parallèle est représentée par le produit tensoriel des matrices de morphisme où la matrice de morphisme du contrôleur est remplacée par la matrice identité pour les événements incontrôlables. Le contrôle optimal (le moins restrictif) des automates  $(\max, +)$  vis-à-vis du critère juste-à-temps est étendu aux automates d'intervalles dans cet article. Nous étudions les superviseurs les plus permissifs (les moins contraignants) pour garantir des intervalles spécifiés pour l'exécution des événements (en incluant la possibilité de supprimer certaines occurrences). Notre approche s'appuie sur la théorie de la résiduation appliquée à une extension du produit d'Hadamard des séries formelles. Nous discutons aussi la possibilité d'extension aux observations partielles.

## 2 Préliminaires

Dans cette section, on fait un rappel succinct sur les semi-anneaux idempotents (voir [3] pour une présentation exhaustive) et on spécifie des résultats sur les séries formelles d'intérêt pour la suite.

### 2.1 Semi-anneaux idempotents

**Définition 1.** *Un semi-anneau idempotent (aussi appelé dioïde) est un ensemble  $\mathcal{D}$  muni de deux opérations binaires : l'addition et la multiplication. L'addition  $\oplus$  est commutative, associative, et admet un zéro, noté  $\varepsilon$ , (i.e.,  $\varepsilon \oplus a = a$  pour tout  $a \in \mathcal{D}$ ). De plus, l'opération  $\oplus$  est idempotente, (i.e.,  $a \oplus a = a$  pour tout  $a \in \mathcal{D}$ ). La multiplication  $\otimes$  est associative, possède un élément neutre  $e$  (i.e.,  $e \otimes a = a \otimes e = a$  pour tout  $a \in \mathcal{D}$ ), et est distributive par rapport à  $\oplus$ . De plus,  $\varepsilon$  est absorbant pour  $\otimes$ , i.e.,  $\forall a \in \mathcal{D} : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ .*

Dans tout dioïde, l'ordre naturel  $\preceq$  est défini par :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$ . Un dioïde  $\mathcal{D}$  est complet si tout sous ensemble  $A$  de  $\mathcal{D}$  admet une plus petite borne supérieure, notée  $\bigoplus_{x \in A} x$ , et si  $\otimes$  distribue sur les sommes infinies. En particulier,  $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$  est le plus grand élément de  $\mathcal{D}$ . Dans un dioïde complet, la plus grande borne inférieure  $\wedge$  existe toujours :  $a \wedge b = \bigoplus_{x \preceq a, x \preceq b} x$ .

Comme exemples de dioïde, il y a ceux portant sur des nombres, mais aussi des langages ou des séries formelles. Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  le maximum joue le rôle de l'addition, i.e.,  $a \oplus b = \max(a, b)$ , et l'addition classique celui de la multiplication, i.e.,  $a \otimes b = a + b$ , et  $\varepsilon = -\infty$  alors que  $e = 0$ . Dualelement, on a le dioïde  $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$  où l'addition est le minimum et  $\varepsilon = \infty$ .

Le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  enrichi de l'élément  $T = +\infty$  est noté  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , il est complet, sachant que  $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$ .

Les opérations matricielles sont définies comme dans l'algèbre linéaire classique. La matrice identité de  $\mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  est notée  $E$ .

Dans un dioïde complet, on définit l'étoile de Kleene selon la formule

$$a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n,$$

où par convention  $a^0 = e$ , et  $a^n = a^{n-1} \otimes a$  pour tout  $a$ .

Nous avons besoin de la notion de *produit direct* de dioïdes qui correspond au produit cartésien de leurs ensembles sous-jacents muni de l'addition et de la multiplication définies composantes par composantes.

Nous allons considérer uniquement le produit direct des dioïdes  $\mathbb{R}_{\min}$  et  $\mathbb{R}_{\max}$ , noté  $\mathbb{R}_{\min}^{max}$ . L'addition dans  $\mathbb{R}_{\min}^{max}$  correspond donc à la minimisation des premières composantes et à la maximisation des secondes composantes. Formellement, nous avons la définition suivante.

**Définition 2.**  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  est le dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}), \oplus, \otimes$  avec

$$\begin{aligned} [c_1, d_1] \oplus [c_2, d_2] &= [\min(c_1, c_2), \max(d_1, d_2)], \\ [c_1, d_1] \otimes [c_2, d_2] &= [c_1 + c_2, c_2 + d_2], \text{ et,} \\ \varepsilon &= [\infty, -\infty] \text{ est l'élément zéro,} \\ e &= [0, 0] \text{ est l'élément identité.} \end{aligned}$$

Notons que nous utilisons une notation d'intervalle, e.g.  $[c_1, d_1]$ , pour un élément de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$ , c'est-à-dire à une paire du produit cartésien constituant l'ensemble sous-jacent. Il ne nous suffit pas de prendre l'ensemble des intervalles (i.e., les éléments de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  avec la borne inférieure plus petite que la borne supérieure) comme l'ensemble sous-jacent avec l'union pour l'addition des intervalles, car nous allons utiliser les éléments avec borne inférieure plus grande que la borne supérieure dans les contrôleurs.

L'ordre naturel dans  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  est donné par  $[a, b] \preceq [c, d]$  ssi  $[a, b] \oplus [c, d] = [c, d]$ , i.e.,  $c \leq a$  et  $b \leq d$ . Pour les éléments de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  qui correspondent à des intervalles, la relation d'ordre coïncide bien avec l'ordre des intervalles donné par l'inclusion (des intervalles). On va utiliser l'opération  $\wedge$  dans la version complète de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$ , noté par  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max} = \mathbb{R}_{min}^{max} \cup \{-\infty, \infty\}$ , i.e. le produit direct de  $\overline{\mathbb{R}}_{min}$  avec  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . Il est facile de voir que  $[c_1, d_1] \wedge [c_2, d_2] = [\max(c_1, c_2), \min(d_1, d_2)]$ .

Le produit de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  nous amène à considérer des "intervalles dégénérés", i.e., des "intervalles" dont la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure. Par exemple,  $[4, 3]$  appartient à  $\mathbb{R}_{min}^{max}$ , et le plus petit de ces intervalles dégénérés est le zéro  $\varepsilon = [\infty, -\infty]$ . Dans la section suivante, nous allons considérer des intervalles dégénérés pour les pondérations dans l'automate jouant le rôle de superviseur : la borne inférieure (typiquement positive) indique la valeur de temps qui sera ajoutée à la borne inférieure d'intervalle d'occurrence d'un événement (la borne inférieure sera augmentée), et la borne supérieure (typiquement négative) indique la valeur de temps qui sera ajoutée à la borne supérieure (la borne supérieure sera donc diminuée). Ainsi l'intervalle d'occurrence d'un événement sera restreint par le contrôleur. A noter que l'élément zéro de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  sera utilisé par le contrôleur pour interdire une transition et l'élément identité sera utilisé pour les événements incontrôlables, dont les dates d'occurrence doivent être laissées intactes. On va aussi noter par  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}$  la version complète de  $\mathbb{R}_{min}^{max}$ , i.e., avec le plus grand élément  $T = \bigoplus_{a \in \mathbb{R}_{min}^{max}} a = [-\infty, \infty]$  qui est bien le plus grand intervalle (au sens de l'ordre sur  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}$ ).

L'addition de deux matrices de même dimension dans  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  est faite composantes par composantes et pour deux matrices  $A \in (\mathbb{R}_{min}^{max})^{m \times n}$  et  $B \in (\mathbb{R}_{min}^{max})^{n \times q}$ , leur produit  $A \otimes B \in (\mathbb{R}_{min}^{max})^{m \times q}$  est défini par  $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$ . La matrice identité de  $(\mathbb{R}_{min}^{max})^{n \times n}$ , notée  $E$ , est définie comme dans l'algèbre linéaire classique par des éléments neutres sur la diagonale et des zéros partout ailleurs, i.e.  $E_{ii} = [0, 0]$  et  $E_{ij} = [\infty, -\infty]$  pour  $i \neq j$ .

Rappelons que si  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}^{m \times n}$  et  $B \in \mathcal{D}^{p \times q}$ , alors leur produit de Kronecker (tensoriel)  $A \otimes^t B$  correspond à la matrice  $mp \times nq$  suivante :

$$A \otimes^t B = \begin{bmatrix} a_{11} \otimes B & \cdots & a_{1n} \otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \otimes B & \cdots & a_{mn} \otimes B \end{bmatrix}.$$

Nous allons considérer dans cet article les automates à multiplicités dans  $\mathbb{R}_{min}^{max}$  introduit dans [11] pour modéliser les réseaux de Petri P-temporels saufs. Nous allons les appeler automates à multiplicités dans des intervalles (AMI).

**Définition 3** (AMI). *Un AMI est un tuple  $G = (Q, A, \alpha, \mu, \beta)$ , où*

- $Q$  et  $A$  sont des ensembles finis d'états et d'événements ;
- $\alpha \in \mathbb{R}_{min}^{max \times |Q|}$  est le vecteur des délais initiaux avec  $\alpha_q \neq \varepsilon$  si, et seulement si,  $q$  est un état initial ;
- $\beta \in \mathbb{R}_{min}^{max \times |Q| \times 1}$  est le vecteur des délais finaux avec  $\beta_q \neq \varepsilon$  si, et seulement si,  $q$  est un état final ;
- $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{R}_{min}^{max \times |Q| \times |Q|}$  est un morphisme engendré par les matrices  $\mu(a) \in \mathbb{R}_{min}^{max \times |Q| \times |Q|}$ , pour tout  $a \in A$ . Pour un mot  $w = a_1 a_2 \dots a_n$ , on a en effet  $\mu(w) = \mu(a_1 a_2 \dots a_n) = \mu(a_1) \mu(a_2) \dots \mu(a_n)$ , où la multiplication matricielle est celle de  $\mathbb{R}_{min}^{max \times |Q| \times |Q|}$ . Nous avons  $[\mu(a)]_{qq'} \neq \varepsilon$  si, et seulement si, il existe une transition menant de l'état  $q$  à l'état  $q'$  causée par l'occurrence de l'événement  $a$ .

Le coefficient de la matrice de morphisme associée à un événement  $a \in A$  et aux états  $q, q' \in Q$ , est un intervalle  $[\mu(a)]_{qq'} \in \mathbb{R}_{min}^{max}$  qui spécifie les délais minimal et maximal pour la transition de  $q$  vers  $q'$  selon l'événement  $a$ , et  $[\mu(a)]_{qq'} = \varepsilon$  s'il n'y a pas de transition de  $q$  vers  $q'$  étiquetée par  $a$ . On dit qu'un AMI est non ambigu s'il existe au plus un chemin reconnaissant tout mot  $w$ , i.e., menant d'un état initial à un état final et étiqueté par  $w$ . Le comportement d'un AMI  $G = (Q, A, \alpha, \mu, \beta)$  est l'application  $y(G) : A^* \rightarrow \mathbb{R}_{min}^{max}$  donnée par la récurrence suivante pour  $w \in A^*$  et  $a \in A$  :

$$\begin{cases} x(\varepsilon) &= \alpha \\ x(wa) &= x(w)\mu(a) \\ y(w) &= x(w)\beta \end{cases},$$

où  $\varepsilon$  désigne le mot vide. Notons que le comportement peut être manipulée de façon équivalente comme une série formelle dans le dioïde  $\mathbb{R}_{min}^{max}(A)$  introduit dans la section suivante.

La théorie de la résiduation permet de définir des 'pseudo-inverses' d'applications isotones non nécessairement inversibles ( $f$  est isotone si  $a \preceq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$ ). Une application isotone  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  est dite résiduable si  $\forall y \in \mathcal{C}$ , la borne supérieure de l'ensemble  $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq y\}$  existe et appartient à cet ensemble. Rappelons plusieurs résultats utiles par la suite.

**Définition 4.** [4] *Une application isotone  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  sont des ensembles ordonnés (tels que les dioïdes), est dite résiduée s'il existe une application isotone  $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  telle que*

$$f \circ h \preceq Id_{\mathcal{C}} \text{ et } h \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}. \quad (1)$$

$Id_{\mathcal{C}}$  et  $Id_{\mathcal{D}}$  sont les applications identité sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  respectivement. L'application  $h$ , appelée résiduée de  $f$ , est unique et est notée  $f^\#$ .

**Théorème 1.** [3, §4.4.4] *Si  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  sont des applications résiduables, alors  $f \circ g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$  est également résiduable et*

$$(f \circ g)^\# = g^\# \circ f^\#.$$

Il est bien connu que la multiplication dans un dioïde complet (y compris celle de  $(\overline{\mathbb{R}_{min}^{max}})^{n \times n}$ ) est résiduable.

**Théorème 2.** *L'application isotone  $R_a : x \mapsto x \otimes a$  dans un dioïde complet  $\mathcal{D}$  est résiduable. La plus grande solution de  $x \otimes a \preceq b$  est égale à  $R_a^\sharp(b)$ , aussi notée  $b\phi a$ . Ce 'quotient' satisfait les formules suivantes :*

$$(x\phi a) \otimes a \preceq x, \quad (f.1)$$

$$(x \otimes a)\phi a \succeq x. \quad (f.2)$$

Notons que la résiduation de la multiplication dans le produit direct  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}$  est faite composante par composante, i.e.,  $[a, b]\phi[c, d] = [a\phi c, b\phi d]$  avec le premier  $\phi$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$  et le second  $\phi$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ . Nous rapellons que sur des valeurs réelles les deux opérations coïncident, i.e.,  $a\phi c = a - c$  et  $b\phi d = b - d$ , mais comme dans un dioïde complet on a  $\varepsilon\phi\varepsilon = T$  (cf. absorptivité de  $\varepsilon$ ) et  $T\phi T = T$ , on a bien  $-\infty\phi -\infty = \infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , alors que  $-\infty\phi -\infty = -\infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ . Il y a aussi  $\infty\phi\infty = \infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ , alors que  $\infty\phi\infty = -\infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ . On voit donc bien des différences sur des valeurs infinies.

## 2.2 Dioïde des séries formelles $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$

Les langages formels sur un alphabet  $A$  sont des sous ensembles du monoïde libre  $A^*$  lequel est constitué des séquences finies de lettres dans  $A$  (mots). L'ensemble des langages formels doté de l'addition (correspondant à l'union des langages) et de la multiplication (correspondant à la concaténation des langages) est un dioïde, noté par  $(Pwr(A^*), \cup, \cdot)$ . Le langage nul est  $0 = \{\}$ , le langage unité est noté  $1 = \{\varepsilon\}$  où  $\varepsilon$  est le mot vide. Un mot  $u = u_1 \dots u_k \in A^*$  est appelé un sous mot de  $v \in A^*$  s'il existe une factorisation  $v = v_1 u_1 v_2 \dots v_k u_k v_{k+1}$  avec  $u_i \in A^*$ ,  $i = 1, \dots, k$  et  $v_j \in A^*$ ,  $j = 1, \dots, k + 1$ . On peut aussi voir les langages sur un alphabet  $A$  comme des séries formelles à variables dans  $A$  et à coefficients booléens. Le dioïde des séries formelles à variables dans  $A$  et à coefficients dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}$ , noté  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ , est muni de l'addition mot à mot et d'une multiplication sous forme de convolution. Formellement, pour  $s = \bigoplus_{w \in A^*} s(w)w \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$  et  $s' = \bigoplus_{w \in A^*} s'(w)w \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ , on a :

$$s \oplus s' \triangleq \bigoplus_{w \in A^*} (s(w) \oplus s'(w))w,$$

$$s \otimes s' \triangleq \bigoplus_{w \in A^*} (\bigoplus_{uv=w} s(u) \otimes s'(v))w.$$

Le dioïde des séries formelles est complet si les coefficients sont dans  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}$  et on notera ce dioïde complet par  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ .

Notons que pour  $s, s' \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ ,  $s \preceq s'$  (l'ordre naturel sur  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ ) correspond à  $s(w) \leq s'(w)$  pour tout  $w \in A^*$ , soit  $s(w) \subseteq s'(w)$  si les deux coefficients sont des intervalles non dégénérés). Le langage  $supp(s) = \{w \in A^* : s(w) \neq \varepsilon\}$  est appelé le support de la série  $s$ . Une série formelle est reconnue par un AMI *ssi* elle est rationnelle, i.e., elle est formée par des opérations rationnelles à partir de séries polynomiales (celles avec un support fini). Nous allons utiliser le produit d'Hadamard de séries formelles de  $\overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ , défini par:

$$s, s' \in \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A), \quad s \odot s'(w) = s(w) \otimes s'(w).$$

**Proposition 3.** [10] *L'application  $H_y : \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\min}^{max}(A)$ ,  $s \mapsto s \odot y$  est résiduable et sa résiduée est donnée par*

$$H_y^\sharp(s)(w) = s(w)\phi y(w). \quad (2)$$

Il est vrai que le produit d'Hadamard est même inversible et son inversion est appelée quotient de Hadamard dans la théorie des séries formelles sur des anneaux [6]. Par la suite on

définira une version généralisée du produit d'Hadamard uniquement résiduable (non inversible), ce qui justifie le maintien de la notation utilisant la résiduée pour  $H_y$ .

Nous aurons aussi besoin des projections sur les séries définies en utilisant les projections sur les langages. Considérons tout d'abord la projection naturelle  $P_c : A \rightarrow A_c$  pour  $A_c \subseteq A$ . Cette projection efface les lettres en dehors de  $A_c$  :

$$P_c(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \in A_c, \\ \epsilon & \text{si } a \in A \setminus A_c. \end{cases}$$

$P_c$  est étendue aux mots  $wa \in A^*$  par  $P_c(wa) = P_c(w)P_c(a)$  (morphisme pour la concaténation) avec  $P_c(\epsilon) = \epsilon$ . Cette définition s'étend naturellement à un langage  $L$  par  $P_c(L) = \{P_c(s) \mid s \in L\}$ . La projection inverse  $P_c^{-1} : \text{Pwr}(A_c^*) \rightarrow \text{Pwr}(A^*)$  est définie sur des langages : pour tout  $M \subseteq A_c^*$ ,  $P_c^{-1}(M) = \{s \in A^* \mid P_c(s) \in M\}$ .

**Lemme 4.** *Soient  $A_c \subseteq A$ ,  $P_c : A^* \rightarrow A_c^*$  la projections naturelle correspondante, et  $P_c^{-1} : \text{Pwr}(A_c^*) \rightarrow \text{Pwr}(A^*)$  son inverse, on a les propriétés suivantes :*

$$(i) \quad \forall M \subseteq A_c^* : P_c(P_c^{-1}(M)) = M,$$

$$(ii) \quad \forall M \subseteq A^* : M \subseteq P_c^{-1}(P_c(M)).$$

Nous utiliserons également la notion de projection suivante sur des séries formelles.

**Définition 5.** *Soient  $A_c \subseteq A$  et  $P_c : A^* \rightarrow A_c^*$  la projection naturelle associée, on définit pour une série  $s = \oplus_{w \in A^*} s(w)w \in \mathbb{R}_{\min}^{\max}(A)$  la série projetée  $P(s)$  comme suit :*

$$P(s)(w) = s(P_c w).$$

Il faut noter que  $P(s)$  est différent de la série  $\tilde{P}(s) = \oplus_{w \in A^*} s(w)P_c w$ , i.e.,  $\tilde{P}(s)(w) = \oplus_{u \in P_c^{-1}(w)} s(u)$ . Par exemple, si  $A_c = \{a\} \subseteq \{a, u\} = A$  et  $s = [0, 2] \oplus [3, 4]au$ , alors  $\tilde{P}(s) = [0, 2] \oplus [3, 4]a$  et  $P(s) = [0, 2]u^* \oplus [3, 4]u^*au^*$ . En fait, nous avons par définition  $P(s)(\epsilon) = P(s)(u) = P(s)(u^2) = \dots = s(\epsilon) = [0, 2]$  et  $P(s)(w) = s(a) = [3, 4]$  pour tout  $w \in u^*au^*$ .

### 3 Contrôle supervisé des AMI

Dans cette section on va élargir le contrôle des automates  $(\max, +)$  aux AMI par le biais de la composition parallèle. Dans la sous section suivante on va définir la composition d'un AMI avec son superviseur (qui est également un AMI).

#### 3.1 Composition parallèle des AMI

La composition parallèle définie ci-dessous est une extension aux automates à multiplicités du produit d'un automate avec le superviseur pour les automates logiques. Tout d'abord, l'ensemble des événements est partitionné comme suit :  $A = A_c \cup A_u$ , où  $A_c$  est l'ensemble des événements contrôlables et  $A_u$  est l'ensemble des événements incontrôlables. Comme dans le cas logique, les transitions contrôlables peuvent être interdites ou leurs intervalles d'exécution peuvent être restreints dans le système composé  $G_c \parallel G_g$ . Par exemple, si dans le système  $G_g$  on a une transition contrôlable selon  $a$  de  $q_g$  vers  $q'_g$  avec l'intervalle  $\mu_{g, q_g, q'_g}(a) = [2, 5]$  et dans le contrôleur  $G_c$  on a une transition selon  $a$  de  $q_c$  vers  $q'_c$  avec l'intervalle  $\mu_{c, q_c, q'_c}(a) = [1, -1]$ , alors dans la composition on a une transition selon  $a$  de  $(q_c, q_g)$  vers  $(q'_c, q'_g)$  avec l'intervalle  $\mu_{(q'_c, q'_g), (q'_c, q'_g)}(a) = [1, -1] \otimes [2, 5] = [3, 4]$ . L'effet du contrôleur est donc de restreindre l'intervalle d'exécution de  $a$ .

**Définition 6.** *Considérons les AMI correspondant au contrôleur  $G_c$  et au système  $G_g$ . Leur composition parallèle est un AMI, noté  $G_c \parallel G_g$ , défini par la représentation linéaire suivante  $G_c \parallel G_g = (Q_c \times Q_g, A, \alpha, \mu, \beta)$  avec*

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_c \otimes^t \alpha_g, \\ \forall a \in A_c : \mu(a) &= \mu_c(a) \otimes^t \mu_g(a), \\ \forall a \in A_u : \mu(a) &= E \otimes^t \mu_g(a), \\ \beta &= e_c \otimes^t \beta_g, \end{aligned}$$

dans laquelle  $e_c = \beta_c$  représente le vecteur colonne composé d'éléments identité  $e = [0, 0]$  de longueur donnée par  $|Q_c|$ .

L'ensemble des événements du contrôleur coïncide avec celui du système, ce qui est une hypothèse standard en commande supervisée. Dans le cas où un automate est défini sur un sous ensemble, nous pouvons appliquer la construction classique en bouclant tous les états par des transitions qui n'appartiennent pas au sous ensemble (ici avec les poids  $e = [0, 0]$ ) et nous obtenons ainsi un automate défini sur l'alphabet total.

D'autres part, les pondérations des transitions incontrôlables ne sont pas modifiées, ce qui traduit le fait que l'automate correspondant au contrôleur ne peut pas invalider ou retarder un événement incontrôlable du procédé.

### 3.2 Superviseur le plus permissif

Nous avons proposé une extension des techniques de supervision des automates logiques aux automates  $(\max, +)$  dans [10]. Dans cette section on va proposer une approche similaire pour les AMI. Plutôt que de considérer les AMI en tant que tels, on s'intéresse à leurs comportements, correspondant à des séries formelles (à coefficients dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$ ). Cette approche est naturelle, au sens où les comportements de référence de la commande supervisée sont classiquement définies par des langages de spécification, lesquels correspondent à des séries formelles dans le cadre des automates  $(\max, +)$  ou AMI. La série obtenue correspondant à un superviseur le plus permissif (i.e., le moins restrictif) est alors réalisée par un AMI, sous réserve qu'elle soit rationnelle.

Le théorème suivant exprime le comportement du système composé avec le superviseur.

**Théorème 5.** *Le comportement du système  $G_g$  composé avec le superviseur  $G_c$  est donné par :*

$$y(G_c \parallel G)(w) = y_c(P_c(w)) \otimes y(G_g)(w). \quad (3)$$

*Proof.* On a

$$y(G_c \parallel G_g)(w) = \alpha \otimes \mu(w) \otimes \beta,$$

où  $(\alpha, \mu, \beta)$  est la représentation de  $G_c \parallel G_g$ . Pour tout  $w = a_1 \dots a_n \in A^*$  on a par la propriété de morphisme  $\mu(w) = \mu(a_1) \dots \mu(a_n)$ , où  $\mu(a) = \mu_c(a) \otimes^t \mu_g(a)$  si  $a \in A_c$  et  $\mu(a) = E \otimes^t \mu_g(a)$  si  $a \in A_{uc}$ . En utilisant la propriété du produit mixte (permettant de commuter le produit matriciel standard et le produit tensoriel lettre par lettre), on obtient alors  $\mu(w) = \mu_c(P_c(w)) \otimes^t \mu_g(w)$ . En revenant vers le comportement, on a

$$y(G_c \parallel G_g)(w) = (\alpha_c \otimes^t \alpha_g) \otimes (\mu_c(P_c(w)) \otimes^t \mu_g(w)) \otimes (\beta_c \otimes^t \beta_g),$$

ce qui conduit après une nouvelle utilisation de la propriété du produit mixte à:

$$y(G_c \parallel G_g)(w) = [\alpha_c \otimes \mu_c(P_c(w)) \otimes \beta_c] \otimes^t [\alpha_g \otimes \mu_g(w) \otimes \beta_g] = y(G_c)(P_c(w)) \otimes^t y(G_g)(w).$$

Il faut noter que le produit tensoriel dans la dernière formule peut être remplacé par le produit scalaire, car il s'agit de scalaires dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  pour lesquels les deux produits coïncident. On aboutit donc à :  $y(G_c || G_g)(w) = y_c(P_c(w)) \otimes y(G_g)(w)$ .  $\square$

Si nous comparons la définition du produit d'Hadamard avec la formule exprimée dans le Theorème 5, nous pouvons voir l'expression relative au comportement du système composé comme une sorte de produit d'Hadamard généralisé (en présence d'événements incontrôlables). Il en résulte la définition suivante.

**Définition 7.** Soit  $A = A_c \cup A_u$  avec  $P_c : A^* \rightarrow A_c^*$  la projection naturelle associée. Le produit d'Hadamard généralisé des séries formelles  $s, s' \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$ , représentant respectivement le contrôleur et le système, est noté  $\odot_{A_u}$  et est défini par  $(s \odot_{A_u} s')(w) = s(P_c(w)) \otimes s'(w)$ .

L'équation (3) dans le theorème 5 admet alors la forme suivante :

$$y(G_c || G) = y_c \odot_{A_u} y.$$

On va appliquer ces résultats pour la commande des AMI. Soient  $y, y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  les séries représentant respectivement le système initial et la spécification. Dans la spécification, on a les deux aspects (logique et temporel). Plus précisément, le support de la série de spécification restreint (est inclus dans) le support de la série du système (si ce n'est pas le cas, il faut considérer l'intersection des supports des deux séries comme dans le cas logique). Similairement, les intervalles d'exécution des événements dans la spécification sont inclus dans les intervalles d'exécution des événements correspondants dans le système, soit pour tout mot  $w \in \text{supp}(y_{ref})$  dans l'intersection des supports on a  $y_{ref}(w) \subseteq y(w)$  (en tant qu'intervalles), ce que l'on écrit :  $y_{ref}(w) \leq y(w)$ . Comme on suppose (sans perte de généralité) aussi l'inclusion des supports  $\text{supp}(y_{ref}) \subseteq \text{supp}(y)$  et donc, de façon équivalente, pour tout mot  $w \notin \text{supp}(y_{ref})$  :  $y_{ref}(w) = \varepsilon \leq y(w)$ , on a pour tout  $w \in A^*$  :  $y_{ref}(w) \leq y$ , i.e.,  $y_{ref} \leq y$  pour les séries du système et de la spécification.

Notre but est de trouver la plus petite série correspondant au contrôleur, notée  $y_C$  telle que  $y_C \odot_{A_u} y \preceq y_{ref}$ . Comme la relation d'ordre ci-dessus est l'ordre naturel de  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$ , il s'ensuit l'interprétation suivante. Il s'agit de trouver la plus petite série  $y_C$ , c'est-à-dire les plus petits coefficients  $y_C^{opt}(w)$  de restriction pour tout  $w$ , et par conséquent (par isotonie du produit de Hadamard généralisé) les plus petits coefficients  $(y_C \odot_{A_u} y)(w)$  tels que  $(y_C^{opt} \odot_{A_u} y)(w) \preceq y_{ref}(w)$ .

Autrement dit, le contrôleur doit restreindre le moins possible le langage temporel du système (correspondant à la série du système) tel que les intervalles d'exécution des séquences d'événements  $w$  du système supervisé (dont le comportement est donné par  $y_C^{opt} \odot_{A_u} y$ ), soient inclus dans les intervalles d'exécution prescrits par la spécification.

Il faut souligner qu'afin de pouvoir utiliser le produit d'Hadamard pour contrôler les deux bornes, inférieure et supérieure, des intervalles d'exécution des événements, les bornes supérieures des "intervalles" du contrôleur seront non positives. La valeur inverse (non négative) de ces bornes du contrôleur correspond ainsi à la quantité de temps que le contrôleur impose pour diminuer la borne supérieure de l'intervalle d'exécution.

Introduisons la notation

$$H_y^{A_u} : s \mapsto s \odot_{A_u} y \tag{4}$$

correspondant au produit d'Hadamard généralisé (en présence des événements incontrôlables), où  $(s \odot_{A_u} s')(w) = s(P_c(w)) \otimes s'(w)$ , i.e.,  $H_y^{A_u}(s) = s(P_c(w)) \otimes s'(w)$ .

Le produit d'Hadamard généralisé (quand  $A_u \neq \emptyset$ ) est résiduable.

**Proposition 6.** *L'application isotone  $H_y^{A_u} : \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est résiduable et sa résiduée (correspondant à la série du contrôleur le moins restrictif) est donnée par*

$$y_c(w) = (H_y^{A_u})^\sharp(s)(w) = \begin{cases} \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} s(u) \phi y(u), & \text{si } w \in A_c^*, \\ \top, & \text{si } w \notin A_c^*. \end{cases} \quad (5)$$

*Proof.* D'après la définition 4 il faut montrer que  $(H_y^{A_u})^\sharp$  est isotone et que les inégalités (1) sont satisfaites. Comme  $x \mapsto x \phi y$  sur  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}$  est isotone,  $H_y^\sharp$  l'est aussi. Pour la suite, on a d'une part

$$\begin{aligned} (H_y^{A_u} \circ H_y^{A_u})^\sharp(s)(w) &= H_y^{A_u} [H_y^{A_u})^\sharp(s)](w) = H_y^{A_u})^\sharp(s)(P_c(w)) \otimes y(w) \\ &= \left[ \bigwedge_{u \in P_c^{-1} P_c(w) \cap \text{supp}(y)} (s(u) \phi y(u)) \right] \otimes y(w), \end{aligned}$$

car  $P_c(w) \in A_c^*$ . Il suffit maintenant de noter que l'ensemble  $\{P_c^{-1} P_c(w) \cap \text{supp}(y)\}$  inclut  $w$  (si  $w \in \text{supp}(y)$ ) ou est vide (si  $w \notin \text{supp}(y)$ ). Dans le premier cas, nous avons

$$\left[ \bigwedge_{u \in P_c^{-1} P_c(w) \cap \text{supp}(y)} (s(u) \phi y(u)) \right] \preceq s(w) \phi y(w)$$

et  $[s(w) \phi y(w)] \otimes y(w) \preceq s(w)$  en utilisant (f.1). Dans le second cas, nous avons  $y(w) = \varepsilon$ , i.e.,  $(H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\sharp)(s)(w) = \varepsilon \preceq s(w)$ .

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} (H_y^{A_u})^\sharp \circ H_y^{A_u})(s)(w) &= H_y^{A_u})^\sharp[H_y^{A_u}(s)](w) = \\ &= \begin{cases} \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} H_y^{A_u}(s)(u) \phi y(u) = \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} [s(P_c(u)) \otimes y(u) \phi y(u)], & \text{si } w \in A_c^*, \\ \top, & \text{si } w \notin A_c^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $\top \succeq s(w)$ , seul le premier cas ( $w \in A_c^*$ ) est pertinent. Pour  $u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)$ , on a d'après le lemme 4-(i),  $P_c(u) \in P_c P_c^{-1}(w) = w$ . Grâce à (f.2) on a alors  $[s(P_c(u)) \otimes y(u)] \phi y(u) \succeq s(P_c(u)) = s(w)$ . Le cas  $\{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)\} = \emptyset$  découle du fait que l'infimum d'un ensemble vide est égal à  $\top = [-\infty, \infty]$ . On conclut que  $H_y^{A_u}$  est résiduable et la résiduée  $(H_y^{A_u})^\sharp$  admet la forme énoncée.  $\square$

Une autre manière de prouver le théorème 6 est d'utiliser la projection  $P_y$ . En effet, on a  $H_y^{A_u} = H_y \circ P_y$ , i.e.,  $\forall s \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$ :  $H_y^{A_u}(s) = H_y(P_y(s))$ . Comme  $\varepsilon$  est absorbant pour  $\otimes$ , i.e., pour  $w \notin \text{supp}(y)$  on peut poser  $P_y(s)(w) = \varepsilon$  sans l'effet sur  $H_y^{A_u}(s)(w)$ .

**Proposition 7.** *L'application  $P_y : \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est résiduable et sa résiduée est donnée par:*

$$P_y^\sharp(s)(w) = \begin{cases} \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} s(u), & \text{si } w \in A_c^*, \\ \top, & \text{sinon (i.e., } w \notin A_c^*). \end{cases}$$

*Proof.* On a alors

$$P_y \circ P_y^\sharp(s)(w) = P_y^\sharp(s)(P_c(w)) = \bigwedge_{u \in P_c^{-1} P_c(w) \cap \text{supp}(y)} s(u) \preceq s(w),$$

car  $P_c(w) \in A_c^*$  et donc seul le premier cas intervient dans la formule pour  $P_y^\sharp$ .

Pour la deuxième propriété d'une application résiduable, on a

$$P_y^\sharp \circ P_y(s)(w) = \begin{cases} \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} P_y(s)(u) = \bigwedge_{u \in P_c^{-1}(w) \cap \text{supp}(y)} s(P_c(u)) \succeq s(w), & \text{si } w \in A_c^*, \\ \top \succeq s(w), & \text{sinon .} \end{cases}$$

L'argumentation pour le reste est identique à celle dans la preuve de Proposition 6.  $\square$

Il reste à appliquer la formule pour la résiduée de la composition de deux applications (cf. Th. 1)  $(H_y^{A_u})^\sharp = (H_y \circ P_y)^\sharp = P_y^\sharp \circ H_y^\sharp$ , et on obtient la même formule en utilisant la formule pour  $P_y^\sharp$  (cf. Proposition 7) et la formule pour  $H_y^\sharp$  (cf. Proposition 3).

**Remarque 1.** (i) Notons que la valeur  $(H_y^{A_u})^\sharp(s)(w) = T$  pour  $w \notin A_c^*$  n'influence pas le comportement du système composé (en boucle fermée). En effet, on évalue d'après la formule (3)  $(H_y^{A_u})^\sharp(s)$  (qui joue le rôle du contrôleur  $y_c$  que l'on cherche) seulement pour les mots projetés dans  $A_c^*$ , i.e., les valeurs dans les mots contenant des événements incontrôlables sont ignorés. Autrement dit, cela conduit au même comportement du système composé si l'on remplace  $T$  par une valeur quelconque  $(H_y^{A_u})^\sharp(s)(w)$  pour  $w \notin A_c^*$ . On va utiliser les contrôleurs avec la valeur  $(H_y^{A_u})^\sharp(s)(w) = (H_y^{A_u})^\sharp(s)(v)$  pour tout  $w = vu$  avec  $u \in A_c^*$ , i.e., dans l'AMI d'un contrôleur on va toujours mettre les valuations  $e = [0, 0]$  sur toutes les transitions incontrôlables. (ii) Comme les contrôleurs ne peuvent que restreindre les intervalles d'exécution des événements, il est important d'observer que seuls les AMI des contrôleurs dont toutes les transitions ont des valuations sous forme d'intervalles, i.e., dont les bornes inférieures sont plus petites que les bornes supérieures, sont admissibles. En termes des séries formelles ils correspondent aux séries non décroissantes sur leur supports et si  $y_c$  de la Proposition 5 ne l'est pas, il faut le remplacer par le plus grand  $y_c^a \preceq y_c$  qui est admissible, notamment pour  $w \in \text{supp}(y_c)$ :  $y_c^a(w) = \bigwedge_{u \in \text{supp}(y_c): w \preceq u} y_c(u)$ .

## 4 Contrôlabilité et rationalité des séries

Dans cette section, nous allons étudier la contrôlabilité des séries représentant les spécifications des AMI. Rappelons que la série formelle de l'AMI à contrôler est notée par  $y$  et celle de la spécification par  $y_{ref}$ . Comme dans la théorie de Ramadge-Wonham, seulement des spécifications  $y_{ref}$  contrôlables peuvent être atteintes comme le comportement résultant des AMI contrôlés, ce qui conduit à la définition suivante.

**Définition 8.** Une série  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est dite contrôlable par rapport à la série d'un AMI  $y$  et  $A_u$  s'il existe une série ("de contrôleur")  $y_c \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  tel que  $y_c \odot_{A_u} y = y_{ref}$ , i.e., si  $H_y^{A_u}(y_c) = y_{ref}$ .

La caractérisation suivante de la contrôlabilité s'ensuit.

**Théorème 8.** Une série  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$  ssi

$$y_{ref} = H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref}).$$

*Proof.* Une des implications est triviale: si  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est telle que  $y_{ref} = H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref})$ , il suffit de prendre  $y_c = (H_y^{A_u})^\sharp(y_{ref})$  et on a  $y_{ref} = H_y^{A_u}(y_c) = y_c \odot_{A_u} y$  (contrôlabilité).

L'implication inverse repose sur la propriété suivante de toute application  $f$  résiduable :  $f \circ f^\# \circ f = f$ , cf. [3, th.4.56]). Pour  $y_{ref}$  contrôlable on a  $y_{ref} = H_y^{A_u}(y_c)$  et on obtient alors :  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref}) = H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\# \circ H_y^{A_u}(y_c) = H_y^{A_u}(y_c) = y_{ref}$ .  $\square$

Il est à noter que l'inégalité  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(s) \preceq s$  est toujours satisfaite d'après la définition 4 de la résiduation. On a aussi la caractérisation suivante d'une série contrôlable.

**Théorème 9.** *Une série  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$  ssi  $\forall w \in A^*$  :*

$$y_{ref}(w)\phi y(w) = \bigwedge_{u \in P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y)} y_{ref}(u)\phi y(u).$$

*Proof.* D'après la Proposition 7 et la décomposition  $H_y^{A_u} = H_y \circ P_y$ ,  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est contrôlable ssi  $\forall w \in A^*$ :  $y_{ref}(w) = \{\bigwedge_{u \in P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y)} y_{ref}(u)\phi y(u)\} \otimes y(w)$ , d'où  $y_{ref}(w)\phi y(w) = \bigwedge_{u \in P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y)} y_{ref}(u)\phi y(u)$ .  $\square$

Finalement, comme pour tout  $w \in \text{supp}(y)$ ,  $w \in \{u \in P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y)\}$ , nous avons le corollaire suivant, où l'inégalité est remplacée par l'égalité pour  $w \in \text{supp}(y)$ .

**Corollaire 10.** *Une série  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  est contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$  ssi  $\forall w \in \text{supp}(y)$  et  $\forall u \in P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y)$ , on a*

$$y_{ref}(u)\phi y(u) = y_{ref}(w)\phi y(w).$$

#### 4.1 Plus grande spécification contrôlable

Dans le cas où la spécification  $y_{ref} \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  n'est pas contrôlable, il est naturel de chercher la plus grande série plus petite que  $y_{ref}$  qui est contrôlable.

Comme les applications  $H_y^{A_u}$  et  $(H_y^{A_u})^\#$  sont isotones, il est facile de trouver cette série.

**Proposition 11.**  *$H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref})$  est la plus grande série contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$  qui est plus petite ou égale à  $y_{ref}$ .*

*Proof.* La contrôlabilité de  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref})$  découle directement du théorème 8 et de  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref}) \preceq y_{ref}$  (propriété de la résiduation).

Il reste à montrer que  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref})$  est la plus grande série contrôlable qui est plus petite ou égale à  $y_{ref}$ . Soit  $\tilde{y}$  une série contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$  telle que  $\tilde{y} \preceq y_{ref}$ . Par isotonie de  $H_y^{A_u}$  et de  $(H_y^{A_u})^\#$  on obtient  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(\tilde{y}) \preceq H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref})$ . Comme, par contrôlabilité,  $H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(\tilde{y}) = \tilde{y}$ , on a  $\tilde{y} \preceq H_y^{A_u} \circ (H_y^{A_u})^\#(y_{ref})$ .  $\square$

#### 4.2 Discussion sur la réalisation des superviseurs et du cas d'observations partielles

Nous allons maintenant discuter le problème de réalisation des séries des superviseurs par des AMIs.

Dans le cas où tous les événements sont contrôlables la situation est simple, car  $P_y$  est l'identité et  $H_y^{A_u}$  est réduit à  $H_y$ .

On a vu que la résidée du produit d'Hadamard s'écrit comme  $H_y^\#(s)(w) = s(w)\phi y(w)$ . Notons que  $\phi$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}$  est défini composante par composante. On a donc  $H_y^\#(s)(w) = s \odot \bar{y}$ , où pour  $y = (y_1, y_2) \in \overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}(A)$  on note par  $\bar{y}(w) = (-y_1(w), -y_2(w))$  la série avec les coefficients

opposés avec la règle  $-(-\infty) = \infty$ . Dans le cas où il existe un AMI réalisant  $y$  qui est non ambigu, propriété purement logique, on a d'après [12] que  $\bar{y} \in \mathbb{R}_{min}^{max}(A)$ , car les séries non ambiguës sont celles qui sont à la fois  $(\max,+)$  et  $(\min,+)$ -rationnelles. Comme le produit d'Hadamard est réalisable par le produit tensoriel des représentations linéaires (résultat dû à Schutzenberger), on a donc une réalisation du superviseur pour les systèmes représentables par les AMI non ambiguës. En présence d'événements incontrôlables on peut utiliser un algorithme de point fixe pour calculer le langage suprémal contrôlable, où en plus de l'existence des transitions, on considère aussi leurs intervalles d'exécution.

Dans le cas où le superviseur n'observe pas tous les événements, le superviseur peut changer sa décision (de supprimer ou restreindre l'intervalle d'un événement) en se basant seulement sur l'occurrence des événements observables. Autrement dit, toutes les transitions inobservables d'un AMI réalisant le superviseur sont nécessairement sous forme de boucles propres autour des états du superviseur. Comme dans le cas logique, la réalisation AMI d'un superviseur est basée sur l'automate projeté connu comme observateur du système.

## 5 Exemple

Considérons l'exemple d'un AMI  $G$  défini par  $Q = \{1, 2, 3\}$ ,  $A = \{a, b, c, d\}$ , et

$$\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [2, 5] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu(b) = \begin{pmatrix} \varepsilon & [1, 4] & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mu(c) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & [3, 3] \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \mu(d) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [1, 4] & \varepsilon \end{pmatrix}, \beta = (e \ e \ e)^T.$$

On peut vérifier que  $G$  est non ambigu (et même déterministe) et comme le comportement de  $G$  est donné par  $y(w) = \alpha \otimes \mu^*(w) \otimes \beta$ , nous obtenons que pour des mots de  $\text{supp}(y) = [(ab)^* + (cd)^*]^*$ , on a  $y(a) = [2, 5]$ ,  $y(ab) = [2, 5] \otimes [1, 4] = [3, 9]$ ,  $y(aba) = [3, 9] \otimes [2, 5] = [5, 14]$ ,  $y(abab) = [6, 18]$  etc. Similairement,  $y(c) = [3, 3]$ ,  $y(cd) = [3, 3] \otimes [1, 4] = [4, 7]$ , etc.

On suppose que les événements incontrôlables dont on peut ni restreindre l'intervalle d'exécution ni supprimer l'occurrence est  $A_u = \{b, d\}$ . Nous avons donc  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $A_c = \{a, c\}$ .

La spécification est d'interdire  $d$  et de restreindre l'intervalle associé à  $b$  pour la transition partant de l'état 1 à  $[2, 3] \subseteq [1, 4]$ . Les automates correspondant au système  $G$  et à la spécification  $G_{ref}$  sont sur les figures 1a et 1b.

On voit que la série  $y_{ref}$  n'est pas contrôlable par rapport à  $y$  et  $A_u$ . En effet, pour  $w = a$  on a  $P_c^{-1}P_c(w) = (b+d)^*a(b+d)^*$ , i.e.,  $P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y) = \{a, ab\}$  et

$$\begin{aligned} y_{ref}(a) \not\leq y(a) & \quad y_{ref}(a) \not\leq y(a) \wedge y_{ref}(ab) \not\leq y(ab) \\ = [2, 5] \not\leq [2, 5] & \quad = ([2, 5] \not\leq [2, 5]) \wedge ([4, 8] \not\leq [3, 9]) = [1, -1] \\ = [0, 0] & \neq [1, -1], \end{aligned}$$

où on rappelle que dans  $\overline{\mathbb{R}}_{min}^{max}$  on a  $[c_1, d_1] \wedge [c_2, d_2] = [\max(c_1, c_2), \min(d_1, d_2)]$ .

Il y a aussi un problème de contrôlabilité logique, car pour  $w = abc$  on a  $P_c^{-1}P_c(w) = (b+d)^*a(b+d)^*c(b+d)^*$ , i.e.,  $P_c^{-1}P_c(w) \cap \text{supp}(y) = \{abc, abcd\}$  et

$$\begin{aligned} y_{ref}(abc) \not\leq y(abc) & \quad y_{ref}(abc) \not\leq y(abc) \wedge y_{ref}(abcd) \not\leq y(abcd) = \\ = [7, 11] \not\leq [6, 12] & \quad ([5, 7] \not\leq [6, 12]) \wedge (\varepsilon \not\leq [7, 16]) \\ = [1, -1] & \neq \varepsilon (= [\infty, -\infty]). \end{aligned}$$

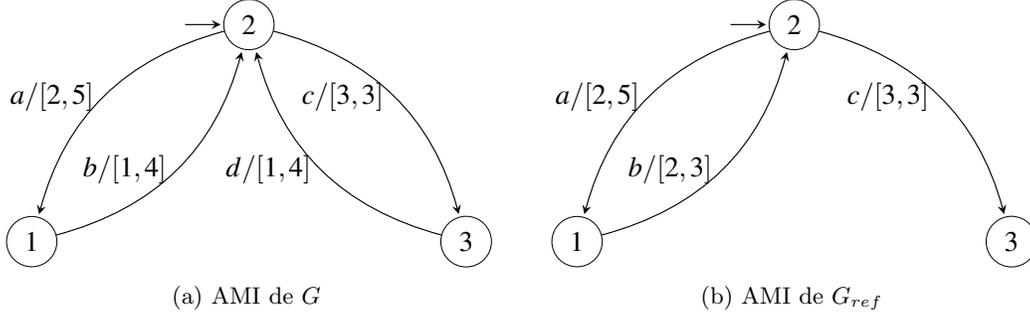


Figure 1: Système et spécification considérés pour l'exemple

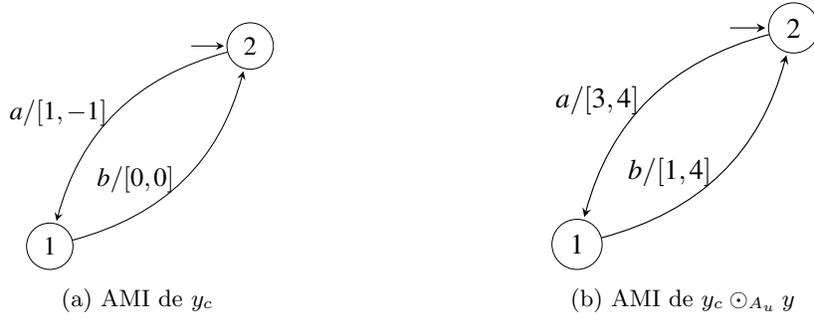


Figure 2: Contrôleur et système en boucle fermée pour l'exemple

La condition du théorème 9 est donc violée. Il est clair que l'incontrôlabilité de  $d$  implique qu'on ne peut empêcher l'occurrence du mot  $abcd$ .

Pour le calcul du contrôleur, nous obtenons par la formule (5) de la proposition 6 que  $y_c(a) = (H_y^{A_u})^\#(s)(a) = y_{ref}(a) \not\leq y(a) \wedge y_{ref}(ab) \not\leq y(ab) = [1, -1]$  comme ci-dessus. On a aussi

$$y_c(ac) = (H_y^{A_u})^\#(s)(ac) = y_{ref}(abc) \not\leq y(abc) \wedge y_{ref}(abcd) \not\leq y(abcd) =$$

$$([\infty, -\infty] \not\leq [6, 12]) \wedge ([\infty, -\infty] \not\leq [7, 16]) = [\infty, -\infty] = \varepsilon,$$

comme on l'a aussi calculé. Nous rappelons que  $y_c(ab)$  n'est pas important pour le comportement du système contrôlé, car pour le système contrôlé, on a  $y_c \odot_{A_u} y(ab) = y_c(a) \otimes y(ab)$ , car  $P_c(ab) = a$  et similairement pour  $abc$  et  $abcd$ . C'est pourquoi on peut choisir une valeur quelconque pour les valuations des transitions incontrôlables et on a choisi la valeur  $e = [0, 0]$  comme déjà indiqué dans la Remarque 1. Le contrôleur le plus permissif et le système contrôlé sont donnés respectivement par les figures 2a et 2b. On vérifie bien que  $y_c \odot_{A_u} y(w) \leq y_{ref}(w)$  pour tout  $w \in A^*$ . On a e.g.  $y_c \odot_{A_u} y(a) = y_c(a) \otimes y(a) = [1, -1] \otimes [2, 5] = [3, 4] \leq [2, 5] = y_{ref}(a)$ ,  $y_c \odot_{A_u} y(ab) = y_c(a) \otimes y(ab) = [1, -1] \otimes [3, 9] = [4, 8] \leq [4, 8] = y_{ref}(ab)$  et  $y_c \odot_{A_u} y(abc) = y_c(ac) \otimes y(abc) = \varepsilon = [\infty, -\infty] = y_{ref}(abc)$ .

## 6 Conclusion

Nous avons étendu dans cet article l'approche comportementale pour synthétiser des contrôleurs des automates d'intervalles, basée sur le produit parallèle de l'automate du système avec celui du contrôleur. Cette construction se traduit en termes de représentations par un produit tensoriel des représentations linéaires correspondantes, et en un produit d'Hadamard en termes de comportement. En présence d'événements incontrôlables, nous avons proposé une approche basée sur une version généralisée du produit d'Hadamard qui rend possible une application directe de la théorie de la résiduation pour calculer les contrôleurs optimaux. On a aussi discuté une extension future aux observations partielles. Notons que les contrôleurs proposés peuvent faillir à être rationnels, e.g. pour des automates ambigus des systèmes. La rationalité des contrôleurs reste un problème ouvert. En terme de pouvoir de modélisation, les automates non ambigus correspondent aux comportement des réseaux de Petri temporels sous les sémantiques fortes. En terme des perspectives, cet article ouvre la voie pour développer le contrôle décentralisé et modulaire des automates d'intervalles, ce qui permettrait de réduire la complexité de la commande de systèmes répartis temporisés de grande taille.

## References

- [1] A. Arnold. *Finite Transition Systems. Semantics of Communicating Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [2] O. Maler, A. Pnueli, J. Sifakis. *On the synthesis of discrete controllers for timed systems*. In: Mayr, E.W., Puech, C. (eds) STACS 95. STACS 1995. Lecture Notes in Computer Science, vol 900. Springer, Berlin
- [3] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder and J.-P. Quadrat (1992). *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*. New York, Wiley.
- [4] T.S. Blyth and M.F. Janowitz (1972). *Residuation theory*. Oxford, Pergamon Press.
- [5] B.A. Brandin and W.M. Wonham. *Supervisory Control of Timed Discrete Event Systems*, IEEE Transaction on Automatic Control 39 (2), pp. 329-351, 1994.
- [6] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational Series and their Languages*. Berlin, Springer Verlag, 1988.
- [7] V. Diekert and G. Rosenberg, editors. *The book of traces*. World Scientific Publ., 1995.
- [8] S. Gaubert. *Performance Evaluation of (max,+) Automata*, IEEE Transaction on Automatic Control, 40(12), pp. 2014-2025, 1995.
- [9] S. Gaubert and J. Mairesse. *Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces*. IEEE Transaction on Automatic Control, 44(4): 683-698, 1999.
- [10] J. Komenda, S. Lahaye, and J.-L. Boimond. *Supervisory Control of (max,+) automata: a behavioral approach*. Discrete Event Dynamic Systems, vol. 19, N4, pp. 525-549, Springer 2009.
- [11] J. Komenda, A. Lai, J. Godoy Soto, S. Lahaye, J.-L. Boimond. *Modeling of safe time Petri nets by interval weighted automata*. WODES 2020, Brasil.
- [12] S. Lombardy and J. Mairesse. *Series which are both Max-plus and Min-plus Rational are Unambiguous*, RAIRO - Theoretical Informatics and Applications, pp. 1-14, 2006.
- [13] E. Le Corrionc, and B. Cottenceau, L. Hardouin, *Control of uncertain (max,+) -linear systems in order to decrease uncertainty*, WODES 2010, Berlin.
- [14] F. Lin and W.M. Wonham, *On Observability of Discrete-Event Systems*, Information Sciences, 44: 173-198, 1988.
- [15] P.J. Ramadge and W.M. Wonham. The Control of Discrete-Event Systems. *Proc. IEEE*, 77:81-98, 1989.