Optimisation globale de l'information mutuelle
sur un canal quantique
ROADEF 2023 - Rennes

Nicolas Delanoue, François Chapeau-Blondeau

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.
{nicolas.delanoue,f.chapeau}@univ-angers.fr

Mots-clés : *optimisation globale, calcul par intervalle, condition nécessaire d'optimalité, théorie de l'information, information quantique.*

Résumé

La théorie quantique de l'information s'intéresse, entre autre, à la communication efficace d'information sur un canal quantique [1, 6]. En pratique, on rencontre ce genre de situations lorsque les entités supportant l'information sont des objets élémentaires, comme des photons individuels sur une fibre optique, qui doivent être traités conformément à leur nature quantique.

Formellement et sans perte de généralité, on suppose qu'une source d'information classique émet un symbole discret X prenant les valeurs x_j avec les probabilités a priori $p_j = \Pr\{X = x_j\}$, pour $j = 1$ à J. En vue d'une communication sur un canal quantique [1, 2], chaque symbole x_j est encodé par un état quantique représenté par l'opérateur densité $\rho_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ sur l'espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}_N$ de dimension N. Le canal quantique réalise une transformation d'un opérateur densité d'entrée ρ en un opérateur densité de sortie $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ qui peut s'écrire

$$\rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_{\ell} \Lambda_\ell \rho \Lambda_\ell^\dagger \,, \tag{1}$$

où les opérateurs de Kraus $\{\Lambda_\ell\}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ définissent le modèle de canal (avec $\Lambda_\ell^\dagger$ l'opérateur adjoint de Λ_ℓ). En sortie du canal, on réalise une mesure quantique (généralisée ou "POVM") [1] définie par K opérateurs positifs $\mathsf{E}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, pour $k = 1$ à K, qui sont tenus de décomposer l'identité de $\mathcal{H}_N$, et qui établissent les probabilités conditionnelles du décodage en sortie fournies par les traces d'opérateurs,

$$\Pr\{Y = y_k | X = x_j\} = tr(\rho_j' \mathsf{E}_k) \,, \tag{2}$$

avec $\rho_j' = \mathcal{N}(\rho_j)$.

Finalement, concevoir un détecteur quantique optimal consiste à déterminer les opérateurs de mesure E_k de façon à optimiser un critère informationnel. Par exemple, si on souhaite minimiser la probabilité d'erreur de détection, le problème se réduit à un problème d'optimisation semi-définie [3]. Celui-ci peut être résolu efficacement avec méthode de points intérieurs comme dans [4].

D'un point de vue théorie de l'information, il est pertinent de considérer comme critère à maximiser l'information mutuelle. Dans ce cas, le problème à résoudre devient un problème de maximisation non linéaire sous contraintes semi-définies.

En exploitant la convexité cette fonction critère [5], on peut montrer que la solution optimale est atteinte sur la frontière de l'espace admissible. Après avoir donner le modèle du problème à résoudre, nous présenterons comment exploiter astucieusement les techniques de branch and bound du calcul par intervalles [7] couplées à des conditions de type KKT [8] pour obtenir la solution optimale, *i.e.* le détecteur maximisant l'information mutuelle $I(X, Y)$, en particulier en améliorant l'approche récente de [9].

Références

[1] M. M. Wilde, “Quantum Information Theory”, *Cambridge : Cambridge University Press*, 2017.

[2] C. H. Bennett, P. Shor, “Quantum information theory,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2724–2742, 1998.

[3] Y. C. Eldar, A. Megretski, G. C. Verghese, “Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 1007–1012, 2003.

[4] J. B. Lasserre, “Moments, Positive Polynomials and Their Applications”, *Imperial College Press optimization series*, 2010.

[5] T. M. Cover, J. A. Thomas, “Elements of Information Theory”, *Wiley*, 2012.

[6] F. Chapeau-Blondeau, “Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.

[7] A. Neumaier, “Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction”, *Acta Numerica*, vol. 13, pp. 271-369, 2004.

[8] S. Boyd, L. Vandenberghe, “Convex Optimization”, *Cambridge University Press*, 2004.

[9] N. Delanoue, F. Chapeau-Blondeau ; “Optimisation de la transmission d’information sur un canal quantique via le calcul par intervalles” ; *Actes du 28ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Nancy, France, 6-9 sept. 2022.